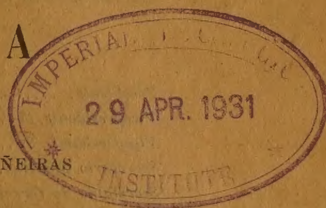
# ANALES

DE LA

# SOCIEDAD CIENTÍFICA

# ARGENTINA





DIRECTOR : INGENIERO JULIO R. CASTIÑEIRAS

ABRIL-JUNIO 1927. — ENTREGAS IV-VI. TOMO CIII


ÍNDICE




BUENOS AIRES

IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »

684 — CALLE PERÚ — 684

1927

## JUNTA DIRECTIVA

(1926-1927)



**ADVERTENCIA.** — Los colaboradores de los *Anales (personalmente responsables de la tesis que sustentan en sus escritos)* que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarlo por escrito. Tienen, además, derecho a la corrección de dos pruebas. Los manuscritos, correspondencia, etc., se enviarán a la Dirección, **Cevallos, 269.** — LA DIRECCIÓN.

# LAS AVES CORREDORAS FÓSILES DEL SANTACRUCENSE (*)

POR LA DOCTORA MATHILDE DOLGOPOL DE SAEZ
Jefe de trabajos prácticos del Departamento de Paleontología del Museo de La Plata

---

## INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Las aves fósiles de Patagonia, en distintas ocasiones han reclamado la atención de algunos paleontólogos de nuestro país y del extranjero, que han orientado sus investigaciones principalmente sobre las especies que podríamos llamar corredoras, por el gran desarrollo de sus miembros abdominales y el reducido tamaño de sus alas y que constituían grupos que alcanzaron en el terciario su máximo desarrollo, para luego extinguirse dejándonos como huella de su paso unos cuantos esqueletos incompletos en su mayoría.

Hasta el año 1887 las únicas aves corredoras terciarias que se conocían, eran las descritas por Lemoine, de los terrenos terciarios de Francia (1878). Ameghino en un trabajo aparecido en 1887 creó el género *Phororhacos*, sobre los restos de una mandíbula, atribuyéndola a un edentado y posteriormente sobre los restos de un cráneo incompleto estableció el género *Tolmodus*, colocándolo dentro del mismo orden. Pero más tarde (1891) habiendo hallado numerosos restos en el santacrucense, describió las ramas mandibulares, las vértebras cervicales, la escápula, el húmero, y los miembros posteriores, constituyendo un tipo de una familia de aves los *Phororhacosidae*, declaran-

(*) Tesis presentada al Instituto del Museo de la Universidad Nacional de La Plata, para optar al grado de Doctor en Ciencias Naturales (especialidad zoología). Debo dejar constancia de mi profundo agradecimiento al doctor Ángel Cabrera por los valiosos consejos dispensados en el transcurso de la presente investigación. Lo mismo al doctor Luis M. Torres, director del Museo, a cuya gentileza debo todas las facilidades para la realización de este trabajo.

do su error al incluir antes el género *Phorhoracos* entre los mamíferos.

Conforme a sus opiniones estratigraficas, Ameghino atribuyó todos estos restos al eoceno, pero hoy está generalmente admitido que el santacrucense corresponde a los comienzos del mioceno.

En el mismo año apareció un trabajo, debido a Moreno y Mercerat, en él, se crea un nuevo orden, el de los *Stereornithes* con numerosas especies distribuídas en nueve géneros : *Brontornis, Rostrornis, Phororhacos, Stereornis, Mesembriornis, Patagornis, Dryornis, Darwinornis y Owenornis.* Además se describen los géneros *Palaeociconia* o *Psilópterus* que dichos autores colocan entre los *Herodiones* y *Accipitres* respectivamente.

Poco después (1891 *b*) Ameghino publicaba una crítica de este trabajo destruyendo casi todos los géneros y especies establecidos, y haciéndolos sinónimos de las diversas especies de *Phororhacos* que él había descripto.

Puede decirse que de este naufragio se salvan tan solo *Brontornis* y *Rostrornis* y aun estos son considerados por Ameghino como sinónimos entre sí. La sinonimia establecida en dicho trabajo es la siguiente :

| MORENO Y MERCERAT | AMEGHINO |
| --- | --- |
| *Stereornis Rollieri.* | |
| *Stereornis Gaudryi.* | *Phororhacos longissimus.* |
| *Darwinornis Copei.* | |
| *Owenornis Lydekkeri.* | |
| *Mesembriornis Studeri.* | |
| *Mesembriornis Quatrefagesi.* | |
| *Darwinornis Zitteli.* | *Phororhacos sehuensis.* |
| *Darwinornis socialis.* | |
| *Owenornis affinis.* | |
| *Mesembriornis Milne-Edwarsi.* | |
| *Dryornis pampeanus.* | *Phororhacos Milne-Edwarsi.* |
| *Palaeociconia australis.* | |
| *Tolmodus inflatus.* | |
| *Patagornis Marshi.* | *Phororhacos inflatus.* |
| *Palaeociconia cristata.* | |
| *Patagornis Lemoinei.* | |
| *Patagornis Bachmani.* | *Phororhacos delicatus.* |
| *Psilopterus intermedius.* | |

Como sinónimo de *Phororhacus inflatus* coloca también Ameghino a su *Tolmodus inflatus*, aunque luego rectifica diciendo que la pieza considerada corresponde a un mamífero del grupo de los *Megalonicydae*.

Tanto *Phrorhacos* como *Psilopterus* son en este trabajo incluídos entre los rátidos, cambiando el nombre del segundo género por *Pelecyornis*.

Posteriormente Ameghino (1894) publicó una nueva crítica del trabajo de Moreno y Mercerat, en cuya introducción habla de la posición sistemática de estas aves y dice que su último representante fué *Palaeociconia* aunque luego no admite este género. En este trabajo cambia el nombre *Phororhacosidae* por *Phororhacidae* e introduce algunas modificaciones en la sinonimia; así agrega a los sinónimos de *Phororhacos delicatus* la especie *Psilopterus communis* que en el trabajo anterior admitía separadamente llamándola *Pelecyornis communis*. La nueva sinonimia es como sigue, sin tener en cuenta a *Phororhacos Milne-Edwarsi* porque sus restos no fueron hallados en el santacrucense.

| MORENO Y MERCERAT | AMEGHINO |
|---|---|
| *Stereornis Rollieri.* | |
| *Sterernis Gaudryi.* | *Phororhacos longissimus.* |
| *Darwinornis Copei.* | |
| *Owenornis Lydekkeri.* | |
| *Mesembriornis Studeri.* | |
| *Mesembriornis Quatregagesi.* | |
| *Darwinornis Zitteli.* | *Phororhacos sehuensis.* |
| *Darwinornis socialis.* | |
| *Owenornis affinis.* | |
| *Patagornis Lemoine (in parte).* | |
| *Patagornis Marshii.* | *Phororhacos inflatus.* |
| *Palaeociconia cristata.* | |
| *Patagornis Lemoinei.* | |
| *Patagornis Bachmani.* | |
| *Psilopterus conmunis.* | *Phororhacos delicatus.* |
| *Psilopterus internedius.* | |
| *Pelecyornis communis.* | |

Estos dos trabajos de Ameghino aunque aclararon muchos puntos relativos a estas aves, adolecen del defecto de no haber visto el autor

los materiales estudiados por Moreno y Mercerat, guiándose solamente para establecer su sinonimia por las descripciones de aquellos autores que son insuficientes y por las figuras que las acompañan, las cuales aunque en su mayor parte, fotografías, dejan también mucho que desear.

Habiendo adquirido el Museo Británico de Historia Natural los materiales estudiados por Ameghino, Andrews (1896-1900) publicó dos trabajos sobre el cráneo y esqueleto de *Phororhacos* expresando su opinión relativa a la posición sistemática del grupo de los *Stereornithes* y haciendo consideraciones sobre este grupo y sus relaciones con *Cariama*.

Finalmente, ha publicado, Kraglievich (1920), un interesante artículo de carácter principalmente informativo sobre las aves fósiles argentinas, en el que se ocupa muy especialmente de la ubicación de *Phororhacos*.

El objeto del presente trabajo es ecencialmente revisar el material tan someramente estudiado por Moreno y Mercerat, tratando de fijar su valor sistemático y a la vez la posición taxonómica de estas aves terciarias. Es de lamentar que nuestro estudio tenga que referirse casi exclusivamente a los huesos de las extremidades, por ser éstas las que están mejor conservadas, pues aunque hay algunas vértebras estas están muy destruídas y en cuanto a los huesos del cráneo sólo se cuentan algunos fragmentos en mal estado de conservación. Por otra parte, de no encontrarse esqueletos completos es muy aventurado afirmar que un trozo de pico o una vértebra suelta pertenezcan a la misma especie que los huesos de una pata.

## POSICIÓN SISTEMÁTICA

La posición sistemática de las aves que nos ocupan ha sido muy discutida, procuraremos examinar las diversas opiniones y deducir de ellas y del estudio de los ejemplares mismos el lugar que puedan ocupar en la clasificación ornitológica. Ante todo sería oportuno recordar que el género *Gastornis*, descrito por Lemoine (1878) del eoceno de Francia y que como veremos más adelante tiene cierta relación con *Brontornis*, ya ocasionó divergencias de opinión sobre su posición sistemática. Así Owen (según el mismo Lemoine) dice que : « *Gastornis* parece haber tenido afinidades íntimas con el orden de las zancudas o *Grallatores* y en este orden probablemente con las *Ralidas*, pero los

caracteres particulares que presenta la tibia indica un género de aves distinto de todos los géneros de aves conocidas hasta el presente.» Milne Edwars (1867) opinaba por el contrario basándose precisamente en la estructura de la tibia por lo que *Gastornis* debía estar más próximo a los *Anseres*, mientras Lydekker colocaba dicho género entre las *Rátidas* (1891). Ésta parece ser también la opinión del mismo Lemoine, cuaddo dice «el volumen del ave en contradicción manifiesta con la posibilidad del vuelo no puede más que confirmar esta manera de ver». Desgraciadamente aunque existe un trozo de esternon de *Gastornis* le falta su parte central lo que impide una opinión decisiva sobre tan importante punto.

Ameghino en su trabajo de 1891 consideró la familia *Phororhacidae* como perteneciente a la subclase de las *Rátidas*. Moreno y Mercerat crearon para algunos de sus géneros el orden *Stereornithes* incluyendo en él *Phororhacos*, pero sin decir a que subclase corresponde. Lydekker (1893) creía como otros autores que estas aves por su gran tamaño no podrían volar y por consiguiente ocupaban un lugar próximo a los avestruces, *casuarius*, etc., pero en una publicación posterior cambia de opinión basándose en la conformación del hueso cuadrado que presenta en su parte superior dos superficies articulares con el cráneo como las carenadas y no una sola como las rátidas.

Ameghino al comentar esto (1894) dice que este carácter por sí solo no es suficiente, puesto que así como hay verdaderas carenadas que tienen el cóndilo articular del cuadrado simple, bien pueden encontrarse rátidas que tengan una articulación doble como las carenadas. Y añade el ilustre paleontólogo «que considera estos pájaros gigantes como rátidos basado sobre todo en su gran tamaño que debía hacerlos impotentes para el vuelo».

Andrews (1896) hace constar que *Phororhacos* y los demás *Stereornithes* no sean verdaderamente rátidos sino formas carenadas, en las cuales las alas han sufrido una reducción y sugiere que posiblemente deben estar estas aves, relacionadas con los antecesores de las *Gruiformes* aproximándose particularmente a *Cariama*.

En 1900 Evans opinaba que algunos representantes de los *Stereornithes*, por ejemplo, *Mesembriornis* son tal vez verdaderas rátidas y tal vez uno de ellos, *Dryornis*, pertenezca a los *Cathartidae*. Como quiera que *Dryornis* pertenece a un horizonte cronológicamente posterior, esta opinión no nos interesa por el momento, pero sí conviene constatar que ya este autor dividió el grupo *Stereornithes* llevando una parte de él a las rátidas y otra a las carenadas.

En un trabajo de Lucas (1908) sobre *Dyatrima,* leemos que este género norteamericano tiene relaciones con los *Stereornithes,* añadiendo el autor que sin duda Cope habría sido de la misma opinión si cuando se describió *Dyatrima* se hubiera conocido los restos de estas aves patagónicas. Conviene advertir que Lucas sólo tuvo a mano como elementos de comparación un calco de *Brontornis,* que suponemos hecho sobre el material tipo del Museo de La Plata.

Zittel (1895-1911) había incluído todas estas aves aunque con duda, en grupo de rátidas que él llama *Struthiornithes,* juntamente con el avestruz, etc.

En la edición de 1911 de la misma obra Schlosser incluye a *Phororhaços* entre las *Grallae* y dice que *Dyatrima* estaría emparentada con él, anotando también la vinculación de *Cariama* con dicho género.

Ya Jaeckel (1911) volvió a considerar los *Stereornithes* como rátidos.

Finalmente Matthew y Granger (1917) al ocuparse de *Dyatrima* opinan que comparando su esqueleto con el de *Phororhacos* y sus aliados pronto se ve que excepto el gran tamaño y las extraordinarias proporciones de la cabeza y del pico, la mencionada ave fósil de América del Norte tiene muy poco de común con las aves de Patagonia. En contra de esta opinión Kraglievich (1920) supone una estrecha vinculación entre dichas aves, pero sin basarse en una comparación directa de los ejemplares.

De todas estas diversas opiniones sólo puede sacarse en claro, dos cosas, primera: que los llamados en general *Stercornithes,* tienen tantos puntos de contacto con las rátidas como con las carenadas del orden *Gruiformes* y segunda: que algunos de sus géneros (*Phororhacos,* por ejemplo) están estrechamente vinculados con *Cariama.*

Examinando detenidamente el material de estas aves patagónicas que existe en el Museo de La Plata y comparándolo con las descripciones y figuras de las aves de la colección Ameghino, hoy en el Museo Británico, lo primero que se observa al estudiar los huesos de las extremidades abdominales es que los géneros descritos pueden distribuirse en dos grupos perfectamente naturales.

Los caracteres que distinguen estos dos grupos están en el tibiotarso, en la extremidad inferior del metatarso y en las falanges ungeales.

Uno de los grupos, en el que entra *Phororhacos,* tiene una cresta tibial anterior normalmente desarrollada y el canal epicondiliano destinado a alejar el tendón del músculo estensor común de los dedos, está cubierto por un ancho puente óseo. En el mismo grupo el agujero

inferior del metatarso se bifurca en un plano vertical como ocurre en la mayor parte de las aves, presentando un orificio de salida en la cara posterior del hueso y otro dentro del espacio intertroclear, que separa la mesotróclea de la ectotróclea.

Las falanges ungueales de este grupo son comprimidas lateralmente, de sección transversal más elíptica, por consiguiente con su cara inferior convexa y con la superficie articular dividida en dos facetas, la superior en plano vertical y la inferior ligeramente oblicua pero también orientada hacia atrás.

En el segundo grupo para el cual puede servir de ejemplo *Brontornis*, el tibiotarso presenta una cresta anterior anormalmente prolongada hacia arriba en una apófisis ancha, plana por adelante y profundamente cóncava por arriba; diríase que estas aves habrían poseído una rótula muy desarrollada, la cual descansaría en la referida concavidad.

El agujero inferior del metatarso ofrece en este grupo una disposición poco frecuente, como con tendencia a la completa desaparición que se observa en *Dyatrima* y en *Dinornis*, pues en vez de ser bifurcado ofrece un solo orificio de salida que es el correspondiente al espacio intertroclear.

Finalmente las falanges ungueales de estas aves son menos comprimidas, de sección transversal triangular y por tanto con la cara inferior plana, y su superficie articular presenta la faceta inferior orientada hacia abajo.

Dada la homogeneidad morfológica que caracteriza a las aves, creo que estas diferencias tienen gran importancia taxonómica, tanta por lo menos como la que tengan las diferencias entre dos órdenes cualesquiera de aves vivientes. La forma distinta del agujero inferior metatarsiano unida a los distintos caracteres de las falanges ungueales significa con seguridad un diferente funcionamiento de los dedos que correspondería a costumbres igualmente diversas. Acaso *Brontornis* y sus afines fueran aves más terrestres, más corredoras, que *Phororhacos*, y sus aliados.

Todos los autores insisten sobre la gran semejanza de *Phororhacos* con los *Cariamidae* y aquellos que llevan este género santacrucense a los *Gruifonmes* lo hacen precisamente porque en este orden ubican el género *Cariama*.

La posición de este último está muy lejos de hallarse definida. No olvidemos que Lesson y modernamente Sharpe lo han colocado entre las rapaces, junto a *Serpentarius*. Tal vez por consiguiente debiéramos

conservar para *Phororhacos* y los géneros próximos, el orden *Stereornithes* y considerar los *Cariamidae* como representantes vivientes del mismo.

Esto explicaría no sólo su semejanza morfológica sino también la que hay en su distribución geográfica. La única diferencia verdaderamente notable entre *Phororhacos* y *Cariama* está en el enorme desarrollo del pico en el primero y en algunas particularidades del cráneo o que pudieran deberse a este mismo desarrollo; pero esta diferencia no es mayor que la que separa entre las aves vivientes a *Balaeniceps* de *Ciconia* a *Pelecanus* de *Sula*, *Luscinnia* de *Coccothraustes*, etc.

En cuanto al segundo grupo es muy difícil relacionarlo con ninguna ave viviente. Tal vez a la que más se asemejan es a los *Dinornithes*, pero la semejanza es superficial; *Dinornis* tiene en el tibiotarso un puente supertendinoso bien desarrollado y carece de agujero inferior en el metatarso.

Lo más acertado sería considerar *Brontornis* y sus afines como representantes de un orden aparte, que podríamos llamar *Brontornithes*.

## EXAMEN COMPARATIVO DE LAS ESPECIES

Las piezas óseas en que basamos el presente estudio están en su mayor parte incompletas, existen sin embargo huesos o trozos de huesos suficientes para un examen comparativo constituyendo documentos fidedignos para demostrar la identidad o diferencia de las especies creadas por los distintos autores. Basándonos en este examen, indicaremos las sinonimias que según nuestro criterio nos parecen más racionales.

## Orden STEREORNITHES

### Fam. PHORORHACIDAE

#### Gen. **PHORORHACOS**

*Ph. longissimus*, Ameghino, *Revista Argentina de Historia Natural*, pág. 259 fig. 77, 1891.

*Stereornis Rollieri*, Moreno y Mercerat, *Anales del Museo de La Plata*, t. I, pág. 45, láms. IX, X y XI, 1891.

*Stereornis Gaudryi*, Moreno y Mercerat, *Idem*, pág. 47, láms. IX y X.

*Mesembriornis Studeri*, Moreno y Mercerat, *Idem*, pág. 48, lám. IV, VII, X, XI y XII.

*Mesembriornis Quatrefagesi*, Moreno y Mercerat, *Idem*, pág. 50, láms. IV, XII y XIV.

*Darwinornis Copei*, Moreno y Mercerat, *Idem*, pág. 60, lám. XVII.

De *St. Rollieri* y *St. Gaudryi*, tenemos las partes superiores de los tarso-metatarsianos izquierdos, cuya diferencia según Moreno y Mercerat consiste en un desnivel de los agujeros superiores, pero esta diferencia no marca un carácter específico, sino individual.

Quedaría por tanto destruída la especie *St. Gaudryi*, pues como hemos dicho anteriormente, era el único testimonio para crear esta nueva especie (ejemplares 120-121 del catálogo de Moreno y Mercerat).

El tarso-metatarsiano que corresponde a *St. Rollieri*, parece pertenecer a un individuo más viejo, pues se nota una marcada tendencia a obliterarse estos agujeros. Las figuras 3 y 4 plancha IX del mismo catálogo son de una gran semejanza, y la sola diferencia se debe a la posición en que se ha colocado la pieza y que la fotografía ha deformado.

Del *Darwinornis Copei*, poseemos la mesotróclea, que corresponde perfectamente a los tarso-metatarsianos anteriormente citados (ejemplar 172 del catálogo de Mereno y Mercerat).

En cuanto al *Owenornis Lydekkeri*, citados por Ameghino en las dos sinonimias que ha publicado, pertenece evidentemente a una especie más pequeña, que suponemos sea *Phororhacos Sehuensis*.

Del *Mesembriornis Quatrefagesi*, poseemos la parte trocleana de un tarso-metatarsiano, faltándole la polea interna; la mesotróclea es idéntica en forma y en tamaño al *Darwinornis Copei* y por ende a los de *St. Gaudryi* y *St. Rollieri*, además tenemos un gran trozo de tibia que es exactamente igual a la de *Mesembriornis Studeri*.

Comparadas todas estas piezas con las correspondientes en *Phororhacos* según los trabajos de Ameghino y de Andrews es evidente que pertenece a una especie de este género, especie que por sus dimensiones corresponde a *Ph. longissimus*.

Debemos advertir además que la mesotróclea (nº 175 del catálogo de Moreno y Mercerat) atribuídas al *Darwinornis Zitteli*, tiene un parecido muy grande con los anteriores, difiriendo tan sólo en algunos milímetros en tamaño, siendo algo más pequeño, lo que nos sugiere de que pertenezca a un animal hembra, lo mismo que una tróclea digital mediana de *Mesembriornis Studeri* (nº 131 del catálogo de Moreno y Mercerat).

### Phororhacos sehuensis

*Phororhacos senensis* (sic) Ameghino, *Revista Argentina de Historia Natural*, pág. 258, t. I, 1891.
*Darwinornis socialis*, Moreno y Mercerat, *Anales del Museo de La Plata*, t. I, pág. 63, lám. XVII, 1891.
*Owenornis affinis*, Moreno y Mercerat, *Idem*, pág. 24, láms. XVII y XVIII.
*Owenornis Lydekkeri*, Moreno y Mercerat, *Idem*, pág. 64, lám. XVIII.

De las tres especies de Moreno y Mercerat que incluimos en la sinonimia tenemos otras tantas mesotrócleas exactamente iguales entre sí, lo que no deja lugar a duda sobre la identidad de los tres.

Las correspondientes a los dos *Owenornis* son del lado derecho y la de *Darwinornis* del lado izquierdo y todas ellas corresponden con la descripción de *Ph. sehuendis*.

### Phororhacos inflatus

*Tolmodus inflatus*, Ameghino, *Revista Argentina de Historia Natural*, t. I, pág. 157, fig. 62, 1891.
*Phororhacos inflatus*, Ameghino, *Idem*, pág. 258.
*Patagornis Marshi*, Moreno y Mercerat, *Idem*, pág. 56, láms. XIV y XV.
*Patagornis Lemoinei*, Moreno y Mercerat, *Idem*, pág. 58, lám. 15 (en parte).

Poseemos una mesotróclea muy parecida a la de las especies anteriores, pero de tamaño más pequeño, la de *Patagornis Marshi*, lo que nos induce a creer que realmente pertenece a *Phororhacos inflatus*.

*Palaeociconia cristata* no puede ser sinónima de *Pal. Marshi*, porque las falanges unguéales son muy distintas. La primera tiene la parte inferior muy cóncava y la región articular presenta dos carillas, mientras que en la segunda la cara inferior es mucho menos excavada y tiene tres carillas o superficies articulares.

Más adelante trataremos con más detenimiento la especie *Palaeociconia cristata*.

En lo que se refiere a *Patagornis Lemoinei*, como luego diremos, está basado sobre restos de dos aves muy distintas por su tamaño, de los cuales una falange ungueal pertenece evidentemente a *Phororhacos inflatus*.

Esta falange ungueal tiene la particularidad de ser bastante achatada presentando la superficie articular una proyección muy angosta y alta. Además a ambos lados hay un canal de bastante profundidad,

que recorre la falange en toda su extensión conservando el mismo calibre.

Este carácter tan marcado podría ser motivo suficiente para una separación genérica, en cuyo caso podría llamarse a la especie *Patagornis inflatus*; Ameghino, sin embargo, no hace mención de estos detalles.

### Phororhacos delicatus

*Phororhacos delicatus*, Ameghino, *Revista Argentina de Història Natural*, t. I, pág. 259, 1891.
*Patagornis Lemoinei*, Moreno y Mercerat, *Anales del Museo de La Plata*, t. I, pág. 58, lám. XV, 1891 (en parte).
*Patagornis Bachmanni*, Moreno y Mercerat, *Idem*, pág. 58, lám. XV.
*Psilopterus communis*, Moreno y Mercerat, *Idem*, pág. 68, láms. XVIII y XXI.
*Psilopterus intermedius*, Moreno y Mercerat, *Idem*, pág. 68, lám. XX.
*Pelecyornis communis*, Ameghino, *Revista Argentina de Historia Natural*, t. I, pág. 449, 1891.

Juzgando por los fragmentos de los huesos de las extremidades que se conservan en el Museo de La Plata, resulta confirmada la opinión de Ameghino acerca de la sinonimia de *Ph. delicatus*. La endotróclea asignada por Moreno y Mercerat a su *Psilopterus intermedius* presenta un apéndice bastante notable.

Careciendo de los demás restos no podemos decir si este carácter es individual o normal en la especie. En este último caso constituiría una diferencia interesante y tal vez de importancia genérica.

De *Pat. Lemoinei* lo único que puede asignarse a esta especie es una tibia la cual presenta la parte distal algo menos excavada que los otros ejemplares sinonomizados con *Ph. delicatus*.

### Gen. PSILOPTERUS

*Psilopterus australis*.
*Psilopterus australis*, Moreno y Mercerat, *Anales del Museo de La Plata*, t. I, pág. 26 a 68, láms. XVIII y XX, 1891.
*Pelecyornis australis*, Ameghino, *Revista Argentina de Historia Natural*, t. I, pág. 449, 1891.

Esta especie estudiada por Ameghino con documentos más completos que los que existen en el Museo de La Plata, debe ser considerada como tipo por eliminación del género *Psilopterus*, puesto que *communis e intermedius* resultan sinónimos de un *Phororhacos*.

No hay sin embargo motivo para substituir el nombre *Psilopterus*, por *Pelecyornis*, pues en la fecha en que lo usaron Moreno y Mercerat sólo se había empleado la forma femenina *Psiloptera*, en 1833, por Sollier para un género de coleópteros y por tanto la forma masculina es perfectamente válida. Es un caso análogo al de *Pithecus* y *Pithecia*, *Picus* y *Pica*, etc.

Lydekker censuró acertadamente la opinión de Moreno y Mercerat que colocaban *Psilopterus* entre los *Cathartidae* pero a su vez el insigne zoólogo inglés cometió un error al considerar dicho género como ligado a los *Rhea*.

Tampoco hay ninguna razón para admitir la familia *Pelecyornidae* (que en todo caso sería *Psilopteridae*) creado por Ameghino y que este fundadamente omitió en su último trabajo sobre las aves fósiles.

En realidad *Psilopterus* es un género muy próximo a *Phororhacos*, sus diferencias han sido establecidas por Ameghino en 1894.

## Orden BRONTORNITHES

### Fam. BRONTORNITHIDAE

#### Gen. **BRONTORNIS**

*Brontornis Burmeisteri*, Moreno y Mercerat, *Anales del Museo de La Plata*, t. I, pág. 37, láms. III y V, 1891.

Esta especie ha sido descrita sobre restos incompletos tanto por Moreno y Mercerat como por Ameghino.

Este último consideraba como sinónimo de ella a *Rostrornis Floweri* pero cuando se examina el material típico de estas especies no puede admitirse esta sinonimia.

Los restos de *Brontornis* que hay en el Museo de La Plata, revelan un ave de formas más robustas que *Phororhacos* con el fémur relativamente corto y grueso, la tibia bastante más cilíndrica con los cóndilos distales ofreciendo una curva más franca.

La cresta tibial anterior se prolonga en un enorme apéndice, plano por delante y ensanchado en su porción terminal.

Ameghino dice que el tibiotarso presenta un puente supertendinoso pero en el material típico no hay indicios de su existencia. Si lo hubo debió ser delgado y frágil como en *Gastornis*, género que se asemeja a los *Brontornithidae*, por otra parte, en la disposición del

agujero inferior del tarsometatarsiano. La mesotróclea es muy ancha y las trócleas laterales son notablemente asimétricas siendo la ectotróclea mucho más robusta que la endotróclea, y esta última aplastada o comprimida lateralmente.

Este último carácter basta para diferenciar *Brontornis* de *Rostrornis*, como veremos a continuación.

### Gen. **ROSTRORNIS**

*Rostrornis Floweri*, Moreno y Mercerat, *Anales del Museo de La Plata*, t. I, pág. 40, láms. IV, V, VI y VII, 1891.

*Rostrornis* es un ave casi tan grande como *Brontornis* pero de constitución menos robusta. Aparte del parecido en tamaño y de los caracteres genéricos nada hay que justifique el considerar estos géneros como sinónimos.

En *Rostrornis* la mesotróclea metatarsiana es algo más angosta que la de *Brontornis* y las poleas laterales proximamente simétricas entre sí, están muy separadas de aquélla.

Ameghino opinaba que esta separación era artificial, como si dichas poleas laterales estuviesen forzadas hacia afuera pero no hay ninguna razón para suponerlo así, desde el momento que su forma no es la que tienen en *Brontornis* recordando más bien la que ofrecen en los *Dinornis* de Nueva Zelandia.

Tenemos además unos trozos de pico que Moreno y Mercerat consideraron como premaxilar y que Ameghino demostró que se trataba de una mandíbula. Aunque se atribuyan a *Rostrornis*, como éste y *Brontornis* son de un tamaño aproximado, indiferentemente pueden ser atribuídos tanto a uno como a otro.

La tibia que Moreno y Mercerat atribuyen a *Rostrornis* es evidentemente de un ave distinta descrita más tarde por Ameghino como *Liornis Floweri*.

### Gen. **LIORNIS**

*Liornis Floweri*.

*Rostrornis Floweri*, Moreno y Mercerat, *Anales del Museo de La Plata*, t. I, pág. 40, 1891.

*Liornis Floweri*, Ameghino, *Boletín del Instituto Geográfico Argentino*, t. 15, pág. 571, figs. 26 a 27, 1894.

De esta especie posee el Museo de La Plata un gran trozo de tibiotarso que es el atribuído por Moreno y Mercerat, a *Rostrornis* y otro

fragmento distal de tibiotarso obtenido por el colector Berry en Santa Cruz. Ambas piezas coinciden en todos sus detalles y dimensiones con la figura y descripción de Ameghino.

### **Liornis minor** sp. n.

Entre los restos de aves de Santa Cruz traídos por Berry, posteriormente a la publicación de Moreno y Mercerat, figura un tarsometatarsiano que evidentemente pertenece a un *Brontornithidae* proximamente del tamaño de *Phororhacos longissimus*; mide este hueso 400 milímetros de longitud y por su forma general se parece mucho al tarso metatarsiano de *Gastornis*.

El agujero inferior como en todos los *Brontornithidae* no ofrece salida por la parte posterior del hueso.

No hemos podido observar en dicha cara posterior vestigio ninguno de la impresión destinada a sostener el dedo interno. La extremidad proximal mide 84 milímetros y la extremidad distal comprendiendo las poleas laterales mide 79,5 milímetros.

En la parte inferior este hueso va aplastándose cada vez más hasta llegar a la región trocleana donde alcanza a tener 13 milímetros de espesor. Presenta además en la región media y hacia un lado una cresta sumamente marcada, que disminuye poco a poco hasta confundirse con el borde del hueso.

La mesotróclea tiene 40 milímetros de diámetro anteroposterior y 37 milímetros de diámetro transversal.

Las poleas laterales, tienen ambas casi el mismo tamaño, pero el espacio intertroclear externo es mucho menor que el interno; la polea externa está soldada en un pequeño trecho a la mesotróclea. No existe puente supertendinoso.

Deducimos de lo dicho anteriormente que el ejemplar de tarso metatarsiano descrito pertenece a un ave del género *Liornis* de Ameghino pero de tamaño algo menor que el *Liornis Floweri*, constituyendo una especie nueva que designamos como *Liornis minor*.

### Gen. **PALAEOCICONIA**

*Palaeociconia cristata.*
*Palaeociconia cristata*, Moreno y Mercerat, *Anales del Museo de La Plata*, t. I, pág. 36, láms. XIX y XX, 1891.

Colocamos esta especie entre los *Brontornithidae* atendiendo a la forma característica de la falange ungueal que se conserva. Esta falan-

ge tiene en conjunto una forma chata. Presenta dos carillas articulares bien definidas y la arista entre estas dos carillas está algo aplanada, así que vendría a constituir una tercera carilla articular, mucho más pequeña que las otras dos.

La carilla inferior está en el plano inferior y a un nivel algo más bajo que la cara de la falange. Tiene esta falange 39 milímetros de longitud. La forma triangular de la carilla posterior y la cara inferior en un plano distinto a la superior, relacionan a *Palaeociconia* con los *Brontornitidae*.

Teniendo en cuenta que no conocemos el tibiotarso y el tarso metatarsiano de esta especie y que en cambio tampoco sabemos cómo eran las falanges de *Liornis*, bien pudiera ocurrir que se tratase de un mismo género, en cuyo caso, *Liornis* sería sinónimo de *Palaeociconia*.

También existen dos vértebras cervicales en la colección, atribuídas por Moreno y Mercerat a *Pal. cristata* pero su tamaño nos parece demasiado reducido para que pertenezcan a la misma ave a que perteneció la falange ungueal descrita.

De todos modos, dichas vértebras no sirven para una comparación, pues las demás que se conservan de *Brontornithidae* están muy incompletas.

## CONCLUSIONES

El grupo que los autores han considerado como *Stereornithes*, debemos dividirlo en *Stereornithes* y *Brontornithes*.

Los *Stereornithes* tienen puentes supertendinosos en el tibiotarso, y el agujero inferior del tarso metatarsiano bifurcado. Comprende este grupo a los *Phororhacidae* con los géneros *Phororhacos* y *Psilopterus*.

Los géneros *Stereornis*, *Mesembriornis*, *Patagornis*, *Darwinornis*, *Owenornis* y la especie *Palaeociconia australis*, son sinónimos de *Phororhacos*.

Probablemente los *Cariamidae* son supervivientes de este grupo.

Los *Brontornithes* no tienen puente supertendinoso o por lo menos éste es muy delgado y el agujero inferior tiene una sola salida.

Los *Brontornithidae* comprenden : *Brontornis*, *Rostrornis*, *Liornis* y *Palaeociconia* (sólo con la especie tipo). Es posible que *Gastornis*, del mioceno europeo, deba referirse a este grupo.

*Callornis* (Ameghino) tiene, según su autor, el agujero inferior del tarso metatarsiano, bifurcado como los *Stereornithes* y el tibiotarso sin puente supertendinoso como los *Brontornithes*.

No habiendo visto material de esta especie, no podemos afirmar a cuál de los dos grupos pertenece y nos parece aventurado asegurar que los dos fragmentos pertenezcan a un mismo ejemplar, teniendo en cuenta lo frecuente que ha sido atribuir a una misma ave restos de especies distintas.

Se describe una especie nueva : *Liornis minor.*

## BIBLIOGRAFÍA

ANDREWS, C. W., 1896, *Remarks on the Stereornithes, a group of Extinct Birds from Patagonia. The Ibis*, número 5.

ANDREWS, C. W., 1899, *On the Extinct Birds of Patagonia. Trans. of the Zoological Soc. of London*, tomo XV, parte 3ª.

AMEGHINO, F., 1891, *Enumeración de las aves fósiles de la República Argentina. Revista de Historia Natural*, tomo I.

AMEGHINO, F., 1894, *Les Oiseaux fossiles de Patagonie. Boletín del Instituto Geográfico Argentino*, tomo XV.

BEDDARD, 1898, *The Structure and classification of Birds.*

EVANS, H. A., 1900, *Birds. — The Cambridge Nat. Hist.*

HEADLEY, W. F., 1895, *The structure and life of Birds.*

JAEKEL, O., 1911, *Die Wirbeltiere. Eine Ubersicht über die fossilen und lebenden Formen*, Berlín.

KRAGLIEVICH, L., 1920, *Sobre las aves fósiles de la República Argentina. El Hornero, Revista de la Sociedad Ornitológica del Plata*, volumen II, número 1.

LEMOINE, V., 1878, *Recherches sur les Oiseaux Fossiles des terrains tertiares inférieurs des environs de Reims*, Reims.

LUCAS, F. A., 1908, *Notes on the osteology and relationschip of the fossil Birds of the genera Hesperornis, Hargeria, Baptornis and Dyatrima. Proc. Unit. Stat. Nat. Mus.*, volumen XXVI.

LYDEKKER, R., 1892, *Recent Researches in Fossil Birds. Natural Science*, volumen I.

MARSH, CH. O., 1880, *Odontornithes : A Monograph on the extinct toothed Birds of North America., Unit. Stat. Geol. Exploration of the fortieth parallel — Clarence King Geologist in charge.*

MATTHEW AND GRANGER, 1917, *The skeleton of Dyatrima, a gigantic bird from the lower eocen of Wyoming*, New York.

MERCERAT, A., 1897, *Note sur les Oiseaux Fossiles de la République Argentine, Anales de la Sociedad Científica Argentina*, volumen XLIII.

MORENO, F. P. y MERCERAT A., 1891, *Catálogo de los pájaros fósiles de la República Argentina. Descripción sumaria de las especies. Anales del Museo de La Plata*, tomo I.

SHARPE, R. B., 1874, *Catalogue of the Accipitres or Diurnal Birds of Prey in the Collection of the British Museum.*

SHUFELDT, R. T., 1913, *Further studies of fossil birds with descriptions of new and extinct species. Bull. Amer. Mus. Nat. Hist.*, volumen 32.

SHUFELDT, R. T., 1915, *Fossil birds in the Marsh Collection of Yale University. Trans. Connect. Acad. of Arts and Sciences.*



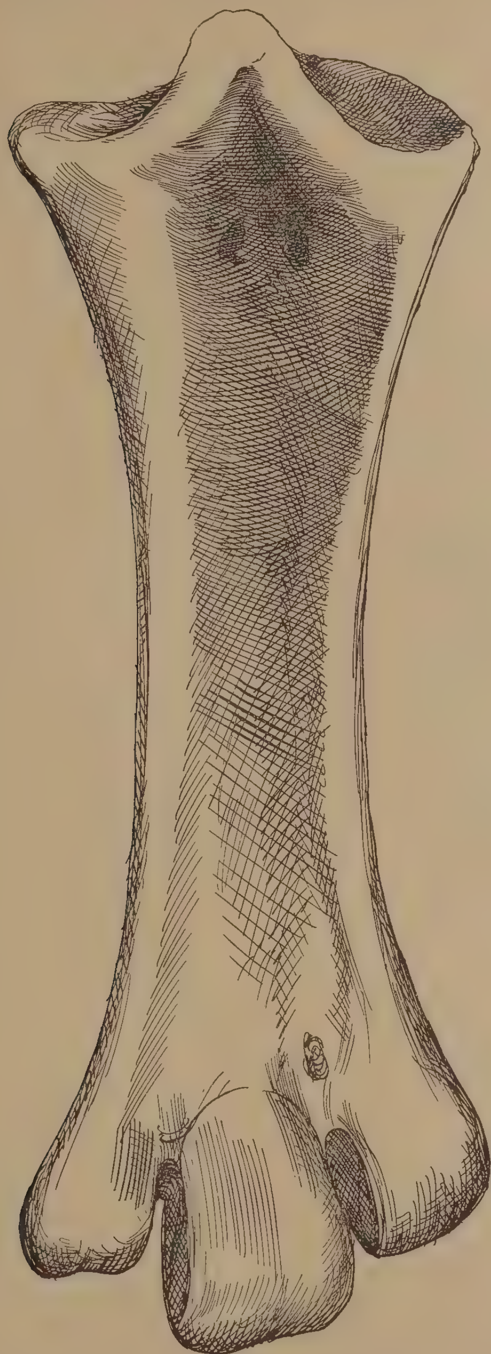
1, Región troclear del metatarso de *Rostrornis Floweri*
(1/2 del tamaño natural)



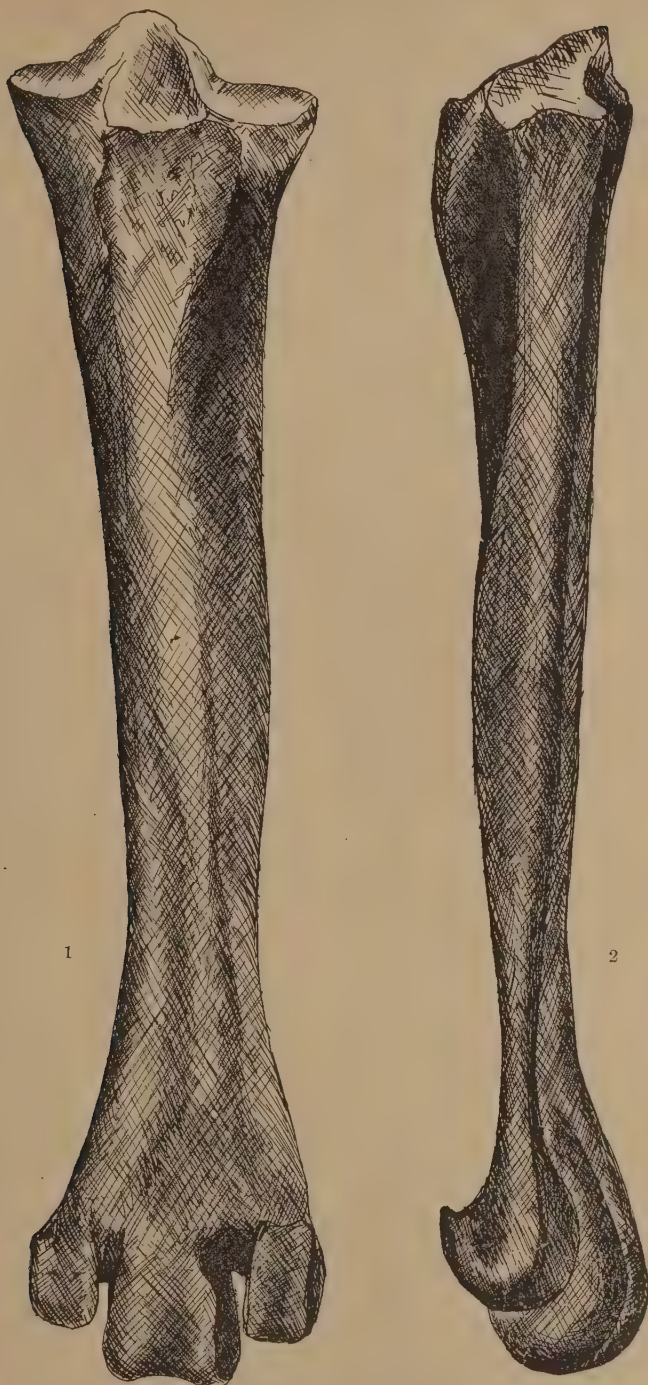
2, Región troclear del metatarso de *Brontornis Burmeisteri*
(ejemplar incomp. 1/2 del tamaño natural)



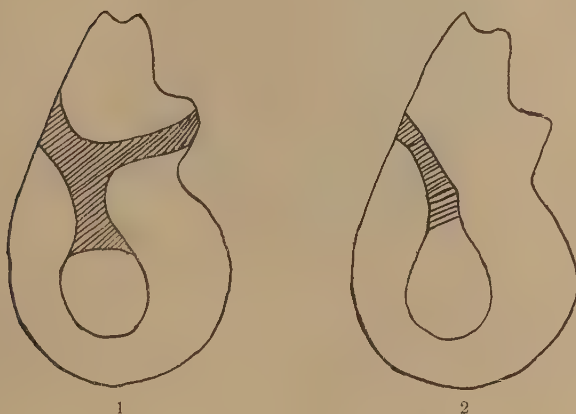
Tarso metatarsiano izquierdo de *Brontornis Burmeisteri*
Falta una polea troclear. ($^1/_2$ del tamaño natural)



Tarso metatarsiano de *Brontornis Burmeisteri*. Ejemplar restaurado
($^{1}/_{2}$ del tamaño natural)




Tarso metatarsiano de *Liornis minor* : 1, visto de perfil; 2, visto de frente
(1/2 del tamaño natural)




Sección ideal de la región troclear del tarso metatarsiano mostrando la diferencia del agüjero inferior: 1, *Stereornithes*; 2, *Brontornithes*. ($^{3}/_{4}$ del tamaño natural)




Falanges ungueales vistas por la cara articular: 3, *Brontornis Burmeisteri*; 4, *Palaeociconia cristata*; 5, *Phororhacos inflatus*. Dibujos esquemáticos a $^{3}/_{4}$ del tamaño natural.



# INGENIERO LUIS VALIENTE NOAILLES

† EL 15 DE JUNIO DE 1927

---

Honda repercusión en lor círculos profesionales y científicos del país, ha tenido la desaparición de este distinguido profesional, al par que correcto caballero.

Fué la suya, una actuación bien meritoria y deja obras realizadas de tanta importancia y en tal cantidad, que su nombre queda vinculado en forma altamente honrosa al progreso del país, en su época de mayor florecimiento.

Nacido el 21 de junio de 1854 en Buenos Aires, cursó sus estudios en esta Capital, en cuya Facultad de ciencias exactas, físicas y naturales, obtuvo el diploma de ingeniero civil.

Desde 1875, muy joven aún, formaba parte del entonces Departamento de obras públicas, en calidad de ingeniero ayudante, ascendiendo al de ingeniero auxiliar en 1877, y a ingeniero de vías y obras del Ferrocaril Central Norte en 1878, confiándosele la sección de Córdoba a Tucumán.

De allí arranca su especialización en ferrocarriles, rama a la que

siguió dedicándose hasta sus últimos días, habiéndose construído bajo su inteligente dirección más de mil kilómetros de vías férreas.

En 1879 fué designado jefe de sección, confiándosele por ese entonces, estudios de la importancia de la canalización del río Gualeguaychú, del trazado del camino del Portillo en la Cordillera, de la construcción del telégrafo internacional a Chile y varios estudios de caminos en la provincia de La Rioja, además de varias inspecciones y construcciones, de obras realizadas en plena Cordillera.

En 1880, en virtud de sus relevantes méritos y de su probada dedicación, fué llamado a ocupar la inspección general de ferrocarriles de la Nación, cargo que dejó en 1881, por haber sido designado jefe de la Comisión de estudios del ferrocarril de Metán a Salta y jefe, también, de la Comisión de estudios del ferrocarril de Villa de La Paz a Mendoza y San Juan.

En 1882 fué designado para dirigir los trabajos de construcción y explotación del Ferrocarril de Frías a Santiago del Estero, trabajo éste en el que desplegó tal actividad e inteligencia, que el Honorable Congreso Nacional, por ley especial, le confirió un premio, en reconocimiento de su destacada actuación, como director de las obras.

En 1887 fué designado administrador del Ferrocarril Gran Oeste Argentino, y en ese mismo año, director del Ferrocarril Nord-Este Argentino.

Posteriormente, tuvo una eficaz cooperación en las construcción de los ferrocarriles de Corrientes a Misiones, y en el año 1892 formó, con los ingenieros Luis A. Huergo y Augusto Ringuelet, el Tribunal arbitral, encargado de zanjar las cuestiones suscitadas entre el Departamento de ingenieros y la empresa constructora : Lucas Gonzáles y Compañía.

Últimamente, formaba parte del Directorio de la Compañía general de ferrocarriles de la provincia de Buenos Aires y era director (desde el año 1901) del Banco Popular Argentino, institución que le contaba entre sus socios fundadores.

En el seno de la Sociedad Científica Argentina tuvo, también, una relevante actuación. Bastaría consignar, en esta breve y ligera reseña de los méritos de este insigne ciudadano, que fué uno de los que lanzó la iniciativa junto con el inolvidable ingeniero Santiago E. Barabino a raíz de la cual fué fundada aquélla.

Bien que incompleta esta ligera biografía, basta, sin embargo, para destacar la personalidad del ingeniero Luis Valiente Nodilles, en su faz de hombre de inteligente laboriosidad y sólo agregaremos respec-

to de sus dotes morales, que estaban, si es posible, por encima todavía, de sus otras cualidades. Llegue a los componentes del hogar modelo, por él fundado, la expresión de la sincera condolencia de la Junta Directiva de la Sociedad Científica Argentina y sirvan los méritos del extinto, como ejemplo, a las generaciones venideras.

La vida es transitoria, mas el recuerdo de los seres meritorios que pasaron por ella, perdura y vive latente en el corazón de los que supieron apreciarlos.

J. J. C. Mosca.

# SOBRE LAS HEMBRAS DE LAS ESPECIES AMERICANAS DE « SCOLIA »

DEL SUBGÉNERO CAMPSOMERIS (DIELIS) [HYMENOPTERA SCOLIIDAE] CON COLOR DEL CUERPO Y ROPAJE COMPLETAMENTE NEGROS

POR J. CHESTER BRADLEY, M. S., PH. D.
Profesor de entomología y conservador de invertebrados (Universidad de Cornell)

---

El estudio de las hembras de este grupo ha revelado ciertos caracteres estructurales más seguros que los que se han usado hasta hoy para su clasificación, los que parecen demostrar ciertos parentescos insospechados entre las especies, y que fijarán tal vez más decisivamente sobre el estado de formas dudosas de lo que ha sido posible hasta hoy en que se basaba sobre la coloración de las alas y el cuerpo y del ropaje solos.

Me ha parecido conveniente describir los caracteres que he observado en el grupo neotropical de especies cuyo color del cuerpo es enteramente negro (excepto a veces dos pequeñas manchitas redondas amarillas en el segundo tergito), y de las que tengo hembras de todas ellas delante de mí, excepto de tres.

*La carena epicnemial.*—Si se examina con detención alguna hembra de *Scolia*, como por ejemplo de *lucida* Lep., se observará una carena en distintos grados de desarrollo que se extiende a lo largo de la hinchazón epicnemial desde la coxa mediana y oblicuamente hacia arriba para venir a dar exactamente con el lóbulo posterior del pronoto. En la especie africana *princeps*, esa cresta es pronunciada; en la especie sudamericana *wesmaeli* falta esa cresta, como también la hinchazón epicnemial. A ambos lados de esa cresta hay una superficie puntuada que varía y que es siempre más ancha hacia el esternón.

*El tubérculo mesopleural.* — A menudo esa carena epicnemial se dirige hacia arriba, o termina más o menos en un tubérculo que forma

el proceso alar exactamente detrás del lóbulo posterior del pronoto. En *lucida*, éste forma un proceso en cresta cuya cara anterior sale de debajo y detrás del lóbulo posterior del pronoto. En *wesmaeli* falta completamente, siendo la lámina superior de la mesopleura ligeramente hinchada, con una superficie uniformemente lisa y pulida. Es muy proeminente en *brethesi* n. sp., en forma de una pirámide cuadrifacetada con la cúspide aguda.

Las *mesopleuras* se dividen por una sutura longitudinal en una lámina superior y en otra inferior. La extremidad anterior de esa sutura se encuentra ordinariamente en un nivel un poco inferior que la extremidad posterior, de modo que corre oblicuamente un tanto hacia arriba hasta llegar al metapleurón; esta sutura puede ser profunda, apenas visible, u obsoleta. La hinchazón epicnemial es inferior cuando esta sutura la atraviesa, y en esta región la superficie de las mesopleuras es ordinariamente casi plana delante de la carena epicnemial, siendo cóncava detrás.

El *metasterno* tiene una conformación insólita en las hembras del género *Scolia*, apareciendo como una lámina plana y ancha, cubriendo de cada lado las bases de las coxas posteriores, y con sus dos mitades unidas en la línea mediana en una sutura a veces distinta anteriormente, a veces obsoleta, pero señalada a lo largo del borde posterior por una escotadura, a veces prolongada, o la prolongación puede tomar la forma de un hoyo o foseta. La sutura mediana puede a veces estar reemplazada por una elevación. En las especies de que trato en este estudio el borde posterior del metasterno es más o menos encogido, a veces con una depresión transversa delante, pero en *plumipes* esta contracción no es tan notable.

Las *metapleuras* se dividen también por una carena longitudinal, un tanto oblicua, la que se sigue ordinariamente hacia atrás hasta debajo del estigma del propodeo, o cerca; pero en *wesmaeli* éstas se continúan hasta detrás de los ángulos postero-laterales bien debajo de la cara posterior del propodeo.

En *brethesi* n. sp. y en *hyalina*, la parte central del último esternito es más o menos cuadrada, existiendo de cada lado del esternito un proceso muy ancho, agudo, en forma de púa. En varias otras especies, un proceso similar puede observarse, pero mucho menor, ordinariamente más o menos cubierto por las fuertes cerdas espinosas.

La parte central anterior del clipeo es más o menos pronunciada, su margen formando un canto aplanado, que de ordinario es notablemente aciculado transversalmente. En *lucida* y *atrata* esta parte cen-

tral está limitada de cada lado por una profunda escotadura, la que es obsoleta, o casi, en varias otras especies.

Burmeister empleó el carácter del mayor espolón de las tibias posteriores — según sea espatulado o no en la extremidad — y éste es un carácter de mucha importancia. Por alguna razón no fué tomado en cuenta por Saussure y Sichel. A veces ese espolón es agudo, a veces obtuso; además, puede ser distintamente espatulado y cóncavo por debajo. Su longitud, comparada con la del metatarso, tiene también su importancia.

No pretendo indicar que las especies incluídas en este estudio formen de por sí un grupo natural. Sin duda que otras especies son más íntimamente relacionadas con algunas de éstas que éstas mismas entre sí, y esto se verificará particularmente en las formas que se distinguen de este grupo por el color de los pelos. Así *wesmaeli* es más íntimamente próxima estructuralmente con *brasiliana* Saussure y con *ecuadorensis* Cameron, que con las demás especies de ropaje negro. Pero para el fin de un estudio puramente preliminar, como el presente, ellas forman un grupo fácilmente reconocible.

Casi todos los autores han admitido que la división de *Scolia* en cuatro o más géneros basada sobre la presencia o ausencia de la segunda célula discoidal y de la tercera submarginal es un arreglo poco natural, pero he seguido la tendencia corriente de comprenderlos todos, así como *Campsomeris* y *Trielis*, como subgéneros. Pero lo hago completamente en forma de tanteo, sin haber llegado a ninguna convicción cómo deben dividirse.

CLAVE PARA ALGUNAS HEMBRAS (1) DE ESPECIES NEOTRÓPICAS DEL SUBGÉNERO « CAMPSOMERIS (= DIELIS) », EN LAS QUE EL ROPAJE Y EL COLOR DEL CUERPO SON ENTERAMENTE NEGROS (EXCEPTO EN UN CASO, CON DOS MANCHAS AMARILLAS EN EL SEGUNDO TERGITO).

A. Surco y carena epicnemiales, y también tubérculo mesopleural, faltando todos; las mesopleuras enteramente sin puntuación y pulidas, excepto un espacio arriba de las coxas y un pequeño

(1) Quedan excluídas tres especies, de las cuales no he visto ejemplares. Éstas son *subobscura* Sm. (= *infuscata* Lep.), *corrigenda* Schulz (= *nigra* Sauss.) y *columba* Sauss. Para su reconocimiento los caracteres de coloración pueden fácilmente inferirse del Catálogo de Saussure y Sichel.

espacio de puntos finos debajo de las alas; lados del propodeo limitados por una carena aguda. *wesmaeli* Smith.

AA. Surco y carena epicnemiales distintos, la superficie del lado anterior puntuada, a lo menos en la placa superior del mesopleurón, ordinariamente delante del surco en su longitud entera; tubérculo mesopleural muy puntuado en su superficie, y variando desde un proceso tan sólo ligeramente anguloso hasta una pirámide proeminente, o con cresta; lados del propodeo ordinariamente sin carena detrás del espiráculo.

B. Espolón mayor de las tibias posteriores evidentemente espatulado.

C. Tubérculo mesopleural muy proeminente, en cresta, muy levantado arriba del nivel del lóbulo pronotal; húmeros muy groseramente puntuados y avanzados delante de las tégulas en un tubérculo; escotadura lateral del clipeo profunda. Alas negras con profundos reflejos azul-verdes. *lucida* Lepeletier.

CC. Tubérculo mesopleural no proeminente sobre la superficie del lóbulo pronotal, no en cresta, aunque a veces formando un bajo tubérculo piramidal; húmeros adelantados en un tubérculo mucho más débil o enteramente redondeados. Alas teñidas de otra manera.

D. Húmeros enteramente redondeados, su superficie con una puntuación igual, apretada y moderada; clipeo con escotaduras laterales profundas. Los dos tercios basales de las alas de un anaranjado-amarillo, la parte apical de un pardo obscuro con fuerte reflejo violáceo (Indias Occidentales). *atrata* Fabricius.

DD. Húmeros más groseramente y menos densamente puntuados, formando un tubérculo bajo y romo, cuya superficie tiene una puntuación más dispersa; clipeo con débiles escotaduras laterales. Alas no muy profundamente pardas, un poco más obscuras en la costa (excepto en la base) y con reflejos moderados violáceos, no verdosos. *regina* Saussure.

BB. Espolón mayor de las tibias posteriores no espatulado.

E. Espolón mayor de las tibias posteriores menor que la mitad (.41-.42 del largo) del metatarso posterior; último esternito con dos púas agudas muy proeminentes, una de cada lado.

F. Tubérculo mesopleural formando una pirámide proeminente en forma de diente, aguda, de cuatro lados, levantada muy por encima del nivel del lóbulo pronotal; borde posterior del metasterno no especialmente bisinuado de cada lado; pronoto con una puntuación apretada y muy fina; mesonoto también con una puntua-

ción apretada fina, pero más dispersa, con solamente una región mediana restringida que no es completamente libre de fina puntuación. Alas amarillento-hialinas, sin el borde obscuro.

*brethesi* n. sp.

FF. Tubérculo mesopleural en una pirámide roma baja, no levantada arriba del nivel del lóbulo pronotal ; cada lado del borde posterior del metasterno distintamente bisinuado ; húmeros con puntuación más dispersa, no tan fina ; mesonoto con puntuación más dispersa, con una región mediana más extensa, débilmente levantada, la que, en parte, aunque no enteramente (especialmente detrás) queda libre de puntos. Alas con una faja costal fusca, la que desaparece antes de la extremidad interrumpida en el medio de la célula M. *costalis* Lepeletier.

EE. Espolón mayor de las tibias posteriores igual a los dos tercios o más (.64 a .8 de su longitud) del metatarso posterior.

G. Margen anterior del clipeo con una escotadura distinta de cada lado, el lóbulo mediano muy ligeramente avanzado hacia la línea mediana. Unicolor, las alas amarillentas y de un hialino lechoso, o fuscas, con reflejos no fuertes de violado o púrpura.

H. Cara posterior del propodeo con puntuación densa, pero superficial en toda su superficie ; faz dorsal del propodeo con puntuación densa y terminando en un surco mediano levantado. Alas amarillento-hialinas, un tanto obscurecidas en la venación.

*servillei* Guérin.

HH. Área mediana de la cara posterior del propodeo sin puntuación ; superficie dorsal con una línea mediana sin puntuación o con un triángulo que termina más o menos en un tubérculo, pero sin formar surco.

I. Cara dorsal del propodeo con una área triangular impuntuada (ocasionalmente algo invadida por dos o tres puntos) que termina en un tubérculo agudo hacia atrás. Alas amarillento-hialinas, lechosas. *hyalina* Lepeletier.

II. Cara dorsal del propodeo con solamente una línea estrecha mediana sin puntuación y sin tubérculo mediano detrás. Alas morenas, con reflejos violáceos o purpúreos.

*peregrina* Lepeletier.

GG. Clípeo sin escotaduras laterales, su borde más distintamente adelantado en el medio. Segundo tergito con una mancha redonda amarilla de cada lado ; alas de un fuliginoso obscuro, con brillantes reflejos azul-verdosos. *bruchi* Brèthes.

**Scolia (Campsomeris) brethesi** n. sp.

♀ *Tota nigra ; polita, tergitis 1-3 opacis ; nigro-pilosa ; alis flavido-hyalinis tantum lacteis et tantulum violaceo-micantibus ; venis piceis. Long. : 28 mm. Alae : 24 mm.*

*Clipeo con el borde anterior bastante uniformemente redondeado,* el canto angostado en los lados y no distintamente estriolado, el disco convexo, sin puntuación, débilmente estriado longitudinalmente delante, pero sin depresiones notables ni tubérculos ; margen superior del alvéolo de las antenas no proeminente ; un surco mediano sin puntuación entre las antenas ; frente arriba de las antenas con puntuación densa; alrededor de las ocelas la puntuación es dispersa e irregular.

*Ángulos humerales enteramente redondeados,* y con toda la superficie del pronoto con puntuación fina y apretada, y con pelos cortos ; *mesonoto con densa puntuación delante, más dispersa en el disco ; pero sin áreas levantadas ;* escudete impuntuado en el medio y de cada lado, una región entre ellas con puntuación dispersa ; postescudete con puntuación dispersa, excepto en los lados detrás. Mesopleuras divididas en láminas superior e inferior por una sutura distinta longitudinal, la superficie del surco extendiéndose desde arriba de las coxas hasta las tégulas con una puntuación fina, no muy densa ; *este surco terminando debajo de las tégulas en un tubérculo muy pronunciado agudo, o diente,* debajo del cual la superficie es escavada posteriormente ; metasterno con puntuación grande y dispersa, un canal mediano longitudinal terminando en un fuerte pozo, su borde posterior contraído, el margen truncado. Propodeo con la puntuación de su superficie dorsal bastante igual, moderadamente apretada, obtusamente levantado en el medio en su unión con la superficie posterior impuntuada y algo cóncava ; los ángulos postero-laterales formando un margen distintamente agudo.

Segundo esternito redondeado en la base, *el último con un proceso en forma de púa aguda y pronunciada de cada lado.*

Holotipo en la Universidad de Cornell, número 839.1, de Trinidad.

Nombrado en honor de mi estimado amigo, el doctor Juan Brèthes, en reconocimiento de sus incansables estudios sobre la fauna himenopterológica de Sud América.

Esta especie tiene su más próximo aliado en *costalis* Lepel., del cual

se distingue fácilmente por su tubérculo mesopleural agudo mucho más proeminente, por su puntuación torácica más densa, por las alas unicolores y otros detalles.

El tubérculo de las mesopleuras recuerda algo el proceso ya descrito y diferentemente formado de la misma estructura de *lucida*, pero en esta especie el espolón tibial es espatulado, los húmeros con ángulos proeminentes y las alas de un color muy diferente. Este tubérculo es de conformación similar al de *costalis*, pero es mucho más proeminente que el lóbulo protorácico en *brethesi*, y lo es menos en *costalis*.

*Brethesi* se aproxima también mucho a *columba*, según la descripción de Saussure, pero es mucho mayor que ésta, y sin duda que un examen de esta última enseñaría varios detalles diferenciales no señalados en la descripción.

# SOBRE LA SUMABILIDAD UNIFORME CON EL MÉTODO EXPONENCIAL

Por J. C. VIGNAUX
Doctor en Ciencia matemática

---

## INTRODUCCIÓN

M. Borel, en una breve nota de los *Compte Rendus de l'Académie des Sciencies* (30 diciembre 1895), después de introducir la noción de *sumabilidad uniforme* con el *método exponencial de sumación* de series divergentes, enuncia sin demostrar, una extensión del clásico teorema de Waiestrass sobre las series convergentes de funciones holomorfas, a las series divergentes sumables con este método.

En el presente trabajo, me propongo desarrollar la teoría de las series funcionales divergentes sumables con este proceso, de un modo enteramente paralelo a la teoría de las series funcionales convergentes; y esto es posible como veremos gracia a la fecunda noción de sumabilidad uniforme de Borel.

Después de demostrar algunos teoremas fundamentales; probaremos bajo qué condiciones es legítimo aplicar a las series funcionales sumables con el método exponencial, las operaciones del análisis infinitesimal, tanto en el dominio real como complejo.

Luego se demuestra el teorema de Waiestrass generalizado, tan sólo enunciado por M. Borel, y termina el trabajo con algunas aplicaciones simples que ponen de manifiesto la importancia teórica y práctica de estos resultados.

# PARTE PRIMERA

## El método de sumación exponencial

### I

### SERIES DE FUNCIONES REALES

**1.** *Suma generalizada.* — Una serie divergente de funciones de una variable $x$,

$$f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

en un intervalo real $(a, b)$; diremos que es *sumable con el método exponencial* de Borel o simplemente *sumable* (E); cuando para cada valor de $x$ del intervalo $(a, b)$, la serie potencial, llamada *serie asociada*

$$u(t, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu(x) \frac{t^\nu}{\nu!},$$

donde

$$s_\nu(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_\nu(x);$$

es una *trascendente entera,* respecto de la variable *real* $t \geq 0$ y existe y es finito, el límite siguiente :

$$\lim_{t \to \infty} e^{-t} u(t, x) = f(x).$$

La función $f(x)$ se llama la *suma generalizada* o simplemente *suma* de la serie divergente dada [1].

Para que esta definición de suma de una serie, no sea contradictoria con la noción clásica, es preciso probar el siguiente

*Teorema I. — Si la serie* (1) *es convergente en el intervalo* $(a, b)$ *con suma* $s(x)$, *ella es también sumable* (E) *y su suma generalizada coincide con* $s(x)$.

En efecto, sea $\xi$ un valor cualquiera de $x$ interior al intervalo $(a, b)$; puesto que

$$\lim_{n \to \infty} s_n(\xi) = s(\xi),$$

[1] E. Borel, *Leçons sur les séries divergentes.* Gauthier-Villars, Paris.

dado un número arbitrario $\varepsilon > 0$, existe un entero $p$ tal que

$$|s_\nu(\xi) - s(\xi)| < \varepsilon \tag{2}$$

para $\nu \geq p$.

De la igualdad

$$e^{-t}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu(\xi)\frac{t_\nu}{\nu\,!}\right) - s(\xi) = e^{-t}\sum_{\nu=0}^{\infty}[s_\nu(\xi) - s(\xi)]\frac{t^\nu}{\nu\,!},$$

resulta, tomando valor absoluto,

$$\left|e^{-t}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu(\xi)\frac{t^\nu}{\nu\,!}\right) - s(\xi)\right| \leq e^{-t}\sum_{\nu=0}^{\infty}|s_\nu(\xi) - s(\xi)|\frac{t^\nu}{\nu\,!}. \tag{3}$$

El segundo miembro de esta desigualdad se puede escribir en la siguiente forma :

$$e^{-t}\sum_{\nu=0}^{\nu=p}|s_\nu(\xi) - s(\xi)|\frac{t^\nu}{\nu\,!} + e^{-t}\sum_{\nu=p+1}^{\infty}|s_\nu(\xi) - s(\xi)|\frac{t^\nu}{\nu\,!}.$$

El primer término tiende a cero, cuando $t \to \infty$; es decir, existe un número $A > 0$ tal que

$$e^{-t}\sum_{\nu=0}^{\nu=p}|s_\nu(\xi) - s(\xi)|\frac{t^\nu}{\nu\,!} < \varepsilon$$

para $t \geq A$; y según la (2), se tiene

$$e^{-t}\sum_{\nu=p+1}^{\infty}|s_\nu(\xi) - s(\xi)|\frac{t^\nu}{\nu\,!} < \varepsilon\,.\,e^{-t}\sum_{\nu=p+1}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu\,!} < \varepsilon,$$

y, por tanto, lo desigualdad (3) se reduce a

$$\left|\left(e^{-t}\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu(\xi)\frac{t^\nu}{\nu\,!}\right) - s(\xi)\right| < 2\varepsilon$$

para $t \geq A$, es decir,

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t}\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu(\xi)\frac{t^\nu}{\nu\,!} = s(\xi),$$

lo cual nos dice, que la série (1) es *sumable* (E) en el punto $\xi$, por tanto, en todo el intervalo $(a, b)$.

**2.** El método de suma exponencial, solamente es aplicable en el campo real, a las series oscilantes, es decir, a aquellas series, tal que la suma de sus $n$ primeros términos, carece de *límite* finito o *infinito*.

En efecto, se tiene el siguiente

*Teorema II. — Una serie de funciones a términos positivos*

$$f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots \qquad (1)$$

*divergente en el intervalo* $(a, b)$ *no es sumable* E *en ningún punto del mismo.*

Sea $\xi$ un punto de este intervalo; se tiene

$$\sigma(t, \xi) = e^{-t} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu(\xi) \frac{t^\nu}{\nu!} = e^{-t} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} s_\nu(\xi) \frac{t^\nu}{\nu!} + e^{-t} \sum_{\nu=m+1}^{\infty} s_\nu(\xi) \frac{t^\nu}{\nu!}, \qquad (2)$$

donde $m$ es un entero positivo cualquiera.

De la divergencia de la serie (1), resulta :

$$\lim_{\nu \to \infty} s_\nu(\xi) = +\infty,$$

esto es, dado un número $M > 0$ arbitrariamente grande, existe un entero $m > 0$, tal que

$$s_\nu(\xi) > M$$

para $\nu \geq m$.

Según esto, la expresión (2) se transforma en la siguiente desigualdad :

$$\sigma(\xi, t) > e^{-t} \sum_{0}^{m} s_\nu(\xi) \frac{t^\nu}{\nu!} + M e^{-t} \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!}, \qquad (3)$$

y como

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} = e^t - \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{t^\nu}{\nu!},$$

la (3) resulta

$$\sigma(\xi, t) > e^{-t} \sum_{\nu=0}^{m} s_\nu(\xi) \frac{t^\nu}{\nu!} + M \left(1 - e^{-t} \sum_{\nu=0}^{m} \frac{t^\nu}{\nu!}\right).$$

Tomando límite para $t \to +\infty$, de ambos miembro de esta relación, y teniendo en cuenta que

$$\lim_{t \to \infty} e^{-t} \sum_{\nu=0}^{m} \frac{t^\nu}{\nu!} = 0$$

y

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t} \sum_{\nu=0}^{m} s_\nu(\xi) \frac{t^\nu}{\nu!} = 0,$$

resulta

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(\xi, t) > M,$$

es decir,

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(\xi, t) = +\infty,$$

luego la serie dada *no* es sumable (E) en el punto $\xi$, y por tanto, tampoco lo es en el intervalo $(a, b)$.

**3.** *Operaciones aritméticas.* — De la definición de suma generalizada de una serie se deducen las siguientes proposiciones que extienden a las series funcionales sumables (E), las correspondientes de las series convergentes.

*Teorema III. — Si la serie*

$$f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_\nu(x) + \ldots \tag{1}$$

*es sumable* (E) *en todo intervalo* $(a, b)$, *con suma generalmente* $f(x)$, *la serie*

$$cf_0(x) + cf_1(x) + \ldots + cf_\nu(x) + \ldots \qquad (c \neq 0) \tag{2}$$

*es también sumable* (E) *con suma igual* a $cf(x)$. En efecto; por hipótesis se tiene :

$$f(x) = \lim_{t\to\infty} e^{-t} u(t, x),$$

donde

$$u(t, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu(x) \frac{t^\nu}{\nu!}$$

es una trascendente entera de $t \geq 0$.

La serie asociada correspondiente a la (2), resulta :

$$v(t, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} cs_\nu(x) \frac{t^\nu}{\nu!} = c \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu(x) \frac{t^\nu}{\nu!},$$

es decir,

$$v(t, x) = cu(t, x),$$

de donde :

$$\lim_{t \to \infty} e^{-t} v(t, x) = c \lim_{t \to \infty} e^{-t} u(t, x) = cf(x),$$

lo cual nos dice que la serie (2) es sumable (E).

*Teorema IV. — Si las dos series*

$$u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{1}$$

$$v_0(x) + v_1(x) + \ldots + v_n(x) + \ldots \tag{2}$$

*son sumables* (E) *con suma* $u(x)$ *e* $v(x)$ *respectivamente en el intervalo* $(a, b)$, la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [u_\nu(x) \pm v_\nu(x)], \tag{3}$$

*es también sumable* (E) *en el mismo intervalo con suma generalizada igual* a $u(x) \pm v(x)$. Por hipótesis, se tiene :

$$u(x) = \lim_{t \to \infty} e^{-t} \sum_{\nu=0}^{\infty} U_\nu(x) \frac{t_\nu}{\nu!} \tag{4}$$

y

$$v(x) = \lim_{t \to \infty} e^{-t} \sum_{\nu=0}^{\infty} V_\nu(x) \frac{t^\nu}{\nu!}, \tag{5}$$

donde

$$U_\nu = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_\nu(x),$$

$$V_\nu = v_0(x) + v_1(x) + \ldots + v_\nu(x).$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (4) y (5), resulta :

$$u(x) \pm v(x) = \lim_{t \to \infty} e^{-t} \sum_{\nu=0}^{\infty} [U_\nu(x) \pm V_\nu(x)] \frac{t^\nu}{\nu!} \tag{6}$$

y como

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [U_\nu(x) + V_\nu(x)] \frac{t^\nu}{\nu!},$$

es la serie asociada correspondiente a la (3), resulta que la (6) es la suma generalizada de la serie (3).

## II

### SUMABILIDAD UNIFORME

**4.** *Definición.* — Dada una serie sumable (E) en todo un intervalo $(a, b)$

$$f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots,$$

diremo con Borel, que ella es *uniformemente sumable con el método exponencial,* o simplemente, *uniformemente sumable* (E), en el intervalo $(a, b)$, cuando se cumplen las dos condiciones siguientes :

$\alpha$) La serie asociada

$$u(x, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu(x) \frac{t^\nu}{\nu!},$$

*converge uniformemente* en el campo $a \leq x \leq b$ y $t \geq 0$;

$\beta$) La expresión

$$e^{-t} u(x, t)$$

tiende *uniformemente* a su límite $f(x)$, cuand $t \to +\infty$ y $x$ pertenece al intervalo $(a, b)$; es decir, dado el número $\varepsilon$ arbitrariamente pequeño, existe un número $A > 0$ independiente de $x$, tal que

$$|e^{-t} u(x, t) - f(x)| < \varepsilon$$

para $t \geq A$, *cualquiera que sea $x$* del intervalo $(a, b)$ (1).

**5.** *Operaciones analíticas.* — La noción de sumabilidad uniforme (E) nos permite obtener, a igual que la noción de convergencia uniforme, una condición suficiente para que una serie funcional sumable (E) pueda ser derivable e integrable término a término.

He aquí los teoremas fundamentales.

*Teorema V. — Si la serie*

$$f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

*de funciones continuas en el intervalo* $(a, b)$ *es uniformemente sumable* (E) *en el mismo, su suma $f(x)$ es también función continua* en $(a, b)$. En efecto, sea $\xi$ un punto cualquiera interior al intervalo $(a, b)$, la suma

$$s_n(\xi) = f_0(\xi) + f_1(\xi) + \dots + f_n(\xi)$$

(1) *Loc. cit.*, página 171.

de $n$ funciones continuas es función continua; luego la función

$$\sigma(\xi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(\xi) \frac{t^n}{n!}, \qquad (2)$$

es continua en el punto $\xi$ para cada valor fijo de $t \geq 0$; desde que según la condición ($\alpha$), la serie (2) es una serie uniformemente convergente en el campo ($a \leq \xi \leq b$), $t \geq 0$.

Por otra parte, de la sumabilidad uniforme (E) de la serie (1), resulta que la expresión

$$e^{-t}\sigma(\xi, t) \qquad (4)$$

tiende uniformemente a su límite $f(\xi)$ para $t \to \infty$, y como la (4) es función continua en $\xi$ para todo valor de $t \geq 0$, resulta en virtud de un teorema de Osgood

$$\lim_{h \to 0} . \lim_{t \to \infty} [e^{-t}\sigma(\xi + h, t)] = \lim_{t \to \infty} . \lim_{h \to 0} [e^{-t}\sigma(\xi + h, t)] = \lim_{t \to \infty} e^{-t}\sigma(\xi, t),$$

es decir,

$$\lim_{h \to 0} f(\xi + h) = \lim_{t \to \infty} e^{-t}\sigma(\xi, t) = f(\xi).$$

Luego, la función es continua en el punto $x = \xi$, y por tanto, en todo el intervalo $(a, b)$.

*Teorema VI. — Si la serie*

$$f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

*es uniformemente sumable* (E) *en toda el intervalo* $(a, b)$ *con suma* $f(x)$ *y sus términos* $f_n(x)$ *funciones integrales en* $(a, b)$; *la serie que resulta integrando término a término la* (1) *es también sumable* (E) *y su suma es la integral de* $f(x)$.

En efecto, la serie asociada

$$\sigma(x, t) = \sum_{0}^{\infty} s_n(x) \frac{t^n}{n!} \qquad (2)$$

es uniformemente convergente para todo $x$ de $(a, b)$ y cada valor fijo de $t \geq 0$, y como sus términos

$$s_n(x) = f_0(x) + \ldots + f_n(x),$$

son funciones integrales en $(a, b)$, la serie (2) es integrable término a término respecto a $x$ entre los límites $a$ y $b$, y tiene por suma la integral de la función $\sigma(x, t)$, es decir,

$$\int_a^b \sigma(x, t)\, dx = \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x) \frac{t^n}{n!} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_a^b s_n(x)\, dx \right] \frac{t^n}{n!}.$$

Si ponemos

$$U_n = \int_a^b s_n(x)\, dx = \sum_{\nu=0}^{n} \int_a^b f_\nu(x)\, dx,$$

la igualdad anterior, resulta :

$$\int_a^b \sigma(x, t)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{t^n}{n!}. \tag{4}$$

Además, de la sumabilidad uniforme (E) de la serie dada, resulta por la condición (β), que

$$e^{-t} \sigma(x, t)$$

tiende uniformemente a $f(x)$, cuando $t \to \infty$ y $a \leq x \leq b$; y como esta expresión es función continua de $x$ en el intervalo $(a, b)$, para cada $t \geq 0$, ella es integrable respecto de $x$, resultando [1] :

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^b e^{-t} \sigma(t, x)\, dx = \int_a^b \lim_{t \to \infty} e^{-t} \sigma(t, x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Finalmente, de la igualdad (4), se obtiene :

$$\int_a^b e^{-t} \sigma(x, t)\, dx = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{t^n}{n!},$$

por tanto,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to \infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{t^n}{n!},$$

luego, la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \int_a^b f_\nu(x)\, dx,$$

[1] Ver J. C. VIGNAUX, *Límite bajo signo de integración*, en *Rev. Mat.*, 1926.

es sumable (E) con suma igual a

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

como queríamos demostrar.

*Teorema VII. — Sea la serie divergente*

$$f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots \tag{1}$$

*sumable* (E) *con suma* $f(x)$ *y sus términos* $f_n(x)$ *funciones derivables con derivada continua en* $(a, b)$. *Si la serie derivada*

$$f_0'(x) + f_1'(x) + \dots + f_n'(x) + \dots \tag{2}$$

*es uniformemente sumable* (E) *en* $(a, b)$, *su suma* $F(x)$, *es la derivada de la función* $f(x)$. En efecto, sea $x$ un punto cualquiera del intervalo $(a, b)$, integrando término a término la serie (2), resulta:

$$\int_a^x F(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x f_n'(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \Big| f_n(x) \Big|_a^x,$$

es decir,

$$\int_a^x F(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} [f_n(x) - f_n(a)]. \tag{3}$$

Además, la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$$

es sumable (E) con suma $f(a)$

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a). \tag{4}$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (3) y (4), resulta:

$$f(a) + \int_a^x F(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x),$$

y como $F(x)$ es función continua, resulta finalmente

$$F(x) = f'(x),$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

La importancia de estos teoremas radica en el hecho de que ellos permiten la introducción legítima de las series sumables (E), en los calculos analíticos en condiciones idénticas a las series funcionales uniformemente convergentes.

## PARTE SEGUNDA

### Series de funciones analíticas

**6.** *Definiciones.* — Las definiciones y teoremas anteriormente demostrados, se extienden al campo complejo en la siguiente forma.

Dada una serie de funciones de la variable compleja $z = x + iy$ definida en el dominio D del plano complejo

$$f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_\nu(z) + \dots \tag{1}$$

diremos que ella es *sumable* (E) en este campo, si existe y es finito el

$$\lim_{a \to \infty} e^{-a} u(a, z) = f(z)$$

donde la función

$$u(a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(z) \frac{a^n}{n!} \tag{2}$$

es una trascendente entera, para $a$ real y positivo, y $z$ del dominio D. La función $f(z)$ es la suma generalizada de la serie (1).

Supuesto la serie (1) sumable (E) en todo el dominio D, diremos con Borel que ella es *uniformemente sumable* (E) en dicho dominio, cuando se verifican las siguientes condiciones.

La serie asociada (2) es *uniformemente convergente,* en todo punto $z$ del dominio D y para cada $a \geq 0$; y la expresión

$$e^{-a} u(a, z)$$

tiende *uniformemente* a su límite $f(z)$ cuando $a \to \infty$ y $z$ pertenece al dominio D.

De aquí se deducen los siguientes teoremas análogos a los ya demostrados para el campo real.

*Teorema VIII. — Si las series de funciones continuas*

$$f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_\nu(z) + \dots$$

*es sumable* (E) *uniformemente en un recinto* D, *su suma generalizada* $f(z)$ *es función continua en él.*

La demostración de este teorema se obtiene razonando en forma análoga que para el caso de la variable real.

*Teorema IX. — Sea una serie de funciones*

$$f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_\nu(z) + \ldots \tag{1}$$

*sumable uniformemente* (E) *en un dominio* (D) *con suma* $f(z)$ *y sus términos integrables sobre un arco de curva rectificable* $(\gamma)$ *situado en* D. *La integrable de* $f(z)$ *sobre* $(\gamma)$ *es la suma generalizada de la serie formada por las integrales de los términos* (1), *tomados sobre la misma curva* $(\gamma)$.

En efecto, la serie asociada

$$u(z, t) = \sum_0^\infty s_n(z) \frac{t^n}{n!}$$

siendo para cada valor de $t$ fijo, uniformemente convergente cuando $z$ pertenece al dominio D y sus términos funciones integrables sobre la curva $(\gamma)$, ella es integrable término a término respecto a $z$ sobre $(\gamma)$, y tiene por suma la integral de la función $u(z, t)$, es decir,

$$\int_{(\gamma)} u(z, t)\, dz = \int_{(\gamma)} \left( \sum_0^\infty s_n(z) \frac{t^n}{n!} \right) dz = \sum_{n=0}^\infty \left[ \int_{(\gamma)} s_n(z)\, dz \right] \frac{t^n}{n!}.$$

Poniendo

$$U_n = \int_{(\gamma)} s_n(z)\, dz = \sum_{\nu=0}^{n} \int_{(\gamma)} f_\nu(z)\, dz,$$

la igualdad anterior se escribe

$$\int_{(\gamma)} u(z, t)\, dz = \sum_{n=0}^\infty U_n \frac{t^n}{n!}. \tag{4}$$

Por otra parte, de la sumabilidad uniforme (E) de la serie dada, resulta que la expresión

$$e^{-t} u(z, t),$$

tiende uniformemente a su límite $f(z)$, cuando $t \to +\infty$, $z$ perteneciente a D, y como además esta expresión es función continua de $z$ en el dominio D, para cada $t \geq 0$ ella es integrable sobre la curva $(\gamma)$, y se tiene :

$$\lim_{t \to \infty} \int_{(\gamma)} e^{-t} u(z, t)\, dz = \int_{(\gamma)} \lim_{t \to \infty} e^{-t} u(t, z)\, dz = \int_{(\gamma)} f(z)\, dz.$$

El pasa al límite bajo signo de integral es legítimo también en el campo complejo según demostraremos en otro lugar [1].

Según esto, y puesto que

$$\int_{(\gamma)} e^{-t} u(z, t)\, dz = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{t^n}{n!},$$

resulta :

$$\int_{(\gamma)} f(z)\, dz = \lim_{t\to\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{t^n}{n!},$$

luego la serie

$$\int_{(\gamma)} f_0(z)\, dz + \int_{(\gamma)} f_1(z)\, dz + \dots + \int_{(\gamma)} f_n(z)\, dz + \dots$$

es sumable (E) y su suma generalizada es la integral

$$\int_{(\gamma)} f(z)\, dz.$$

*Teorema X. — Sea la serie*

$$f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_\nu(z) + \dots \qquad (1)$$

*sumable* (E) *con suma* $f(z)$ *y sus sérminos* $f_\nu(z)$ *funciones derivables con derivadas continua en un dominio* D. *Si la serie derivada*

$$f_0'(z) + f_1'(z) + \dots + f_\nu'(z) + \dots, \qquad (2)$$

*es uniformemente samable* (E) *en* D, *su suma* $\varphi(z)$ *es la derivada de la función* $f(z)$.

En efecto, integrando respecto a $z$, ambos miembros de

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu'(z)$$

entre los límites $z_0$ y $z$, resulta :

$$\int_{z_0}^{z} \varphi(z)\, dz = \sum_{\nu=0}^{\infty} [f_\nu(z) - f_\nu(z_0)],$$

es decir,

$$\int_{z_0}^{z} \varphi(z)\, dz = f(z) - f(z_0)$$

[1] Ver : *Loc. cit.*, página 179.

∴

$$\varphi(z) = f'(z),$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

**7.** *Series de funciones holomorfas.* — Dada una serie de funciones holomorfas de $z$, sumables uniformemente (E) en un dominio D, el teorema I, solo afirma que dicha suma es función continua; pero queda la duda si ella es también holomorfa. Esta queda resuelta con el siguiente teorema que constituye una extensión al campo de las series sumables (E), del clásico teorema de Waiesstrars sobre series convergentes uniformemente de series holomorfas.

*Sea una serie de funciones holomorfas en el dominio* D.

$$f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_\nu(z) + \dots, \tag{1}$$

*y continuas sobre el contorno cerrado* C *que limita* D. *Si la serie* (1) *es sumable uniformemente* (E) *sobre el contorno* C, *ella es también sumable* (E) *en todo el dominio* D *y su suma generalizada es función holomorfa en* D [1].

Puesto que la serie (1) es sumable uniformemente (E) sobre el contorno C, existe el límite

$$\Phi(z) = \lim_{a \to \infty} e^{-a} \sum_0^\infty s_n(z) \frac{a^n}{n!} \tag{2}$$

y además la función suma $\Phi(z)$ es continua para todo punto $z$ del contorno $c$ según el teorema I. En este caso la fórmula de Cauchy nos da

$$\mathrm{F}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}} \frac{\Phi(z)\,dz}{z - t}, \tag{3}$$

donde $t$ es un punto cualquiera del dominio D.

Teniendo presente la relación (2) se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\Phi(z)\,dz}{z - t} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \lim_{a \to \infty} e^{-a} \left( \sum_{\nu=0}^\infty \frac{s_n(z)}{z - t} \frac{a^n}{n!} \right) dz,$$

y por el teorema II resulta

$$\mathrm{F}(t) = \lim_{a \to \infty} e^{-a} \sum_{n=0}^\infty \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{s_n(z)\,dz}{z - t}.$$

[1] M. Borel ha enunciado sin demostrar este teorema, *loc. cit.*, página 171.

Además, puesto que $f(z)$ es función holomorfa en el dominio D, resulta :

$$s_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{s_n(z)\,dz}{z-t},$$

luego la (4) se puede escribir

$$F(t) = \lim_{a\to\infty} e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty} s_n(t)\frac{a^n}{n!} = S(t), \tag{5}$$

luego la serie (1) es sumable (E) con suma S $(t)$ en todo punto $t$ del dominio D.

Además, la función F $(t)$ a causa de estar representada por la integral de Cauchy, es una función holomorfa de $t$ en el dominio D y como según la igualdad (5). la suma S $(t)$ de la serie coincide con el valor de la funcion F $(t)$ en todo el campo D, se concluye que esta función es holomorfa en todo el interier del dominio D.

*Las derivadas sucesivas.* — Un razonamiento análogo nos permite probar que : *las series formadas con las derivadas de mismo orden, de los términos de la serie* (1), *son sumables* (E) *en todo dominio interior a* D *y tiene por suma generalizada las derivadas correspondientes de la función* F $(t)$.

En efecto, se tiene

$$F'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\Phi(z)\,dz}{(z-t)^2},$$

fórmula que se deduce de la de Cauchy. Por tanto, resulta

$$F'(t) = \lim_{a\to\infty} e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{s_n'(z)\,dz}{(z-t)^2}$$

y como

$$S_n'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{s_n'(z)\,dz}{(z-t)^2},$$

resulta

$$F'(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-a}\sum_{n-0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}s_n'(t) = S'(t),$$

lo cual nos dice que la serie

$$f_0'(z) + f_1'(z) + \dots + f_n'(z) + \dots$$

es sumable (E) en todo punto interior a D y su suma es igual a la derivada de $F(t)$.

Del mismo modo se obtiene, para la derivada de orden $\nu$,

$$F^{(\nu)}(t) = \lim_{a \to \infty} e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(\nu)}(z) \frac{a^n}{n!}$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

APLICACIONES

Como aplicación de los teoremas demostrados, es fácil obtener la sumabilidad (E) de un gran número de series divergentes. razonando en la misma forma que para el caso de las series enteras convergentes.

En primer lugar probaremo la sumabilidad (E) de la serie geométrica divergente, en todo el plano complejo.

**8.** *Serie geométrica.* — Sea la serie geométrica divergente

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots \tag{1}$$

de la variable $z = x + iy$. Puesto que es

$$s_n(z) = 1 + z + \ldots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

la serie asociada tiene por valor

$$\sigma(a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - z^n}{1 - z} \frac{a^n}{n!} = \frac{1}{1 - z}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n a^n}{n!}\right],$$

es decir,

$$\sigma(a, z) = \frac{e^a}{1 - z} - \frac{e^{az}}{1 - z},$$

por tanto,

$$e^{-a}\sigma(a, z) = \frac{1}{1 - z} - \frac{e^{-a(1-z)}}{1 - z}.$$

Para que el límite de la expresión $e^{-a}\sigma(a, z)$ exista y sea finito, es necesario y suficiente que la parte real de $1 - z$ sea *positivo*, es decir,

$$R(1 - z) = 1 - x > 0, \tag{2}$$

o lo que es lo mismo,

$$\mathrm{R}(z) = x < 1. \tag{2'}$$

En tal hipótesis, resulta :

$$\lim_{a \to \infty} e^{-a} \sigma(a, z) = \frac{1}{1 - z},$$

es decir, la serie (1) es sumable (E) con suma generalizada igual a $\frac{1}{1-z}$.

Siendo $z = 1$ el único punto singular para la función suma $\frac{1}{1-z}$, el campo de convergencia de la serie (1) es el círculo de centro en O y radio *uno* (círculo de convergencia). En cambio este método nos permite sumar dicha serie en una región mucho más amplia. En efecto, si en el punto A (1, 0) trazamo la tangente al círculo de convergencia todos los puntos del semiplano, limitado por esta tangente y que contiene el origen, satisface a la condición $\mathrm{R}(z) = x < 1$. Luego, en toda esta región la serie (1) es sumable (E) con suma generalizada igual a $\frac{1}{1-z}$.

Este método nos permite la prolongación analítica de la serie (1) fuera de su círculo de convergencia, a todo el semiplano ante definido.

Consideremos ahora una región D finita, limitada por la curva $c$ que no tenga ningún punto común con la tangente al círculo en A, y situado en el campo de sumabilidad (E). En esta área la serie (1) es *uniformemente sumable* (E). En efecto, se tiene

$$\left| \frac{1}{1-z} - e^{-a} \sigma(a, z) \right| = \left| \frac{e^{-a(1-z)}}{1-z} \right| < \frac{e^{-a|1-z|}}{|1-z|} = \frac{1}{1-x} e^{-a(1-x)}$$

y como el punto $z$ pertenece al dominio D, se tiene :

$$1 - x > m,$$

es decir,

$$\left| \frac{e^{-a(1-z)}}{1-z} \right| < \frac{e^{-am}}{m},$$

por tanto, a todo número positivo $\varepsilon$, corresponde un número $\mathrm{A} > 0$, *independiente* de $z$ del dominio D, tal que

$$\frac{e^{-am}}{m} < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad a > \mathrm{A}.$$

La expresión $e^{-a}\sigma(a, z)$ tiende, por tanto, uniformemente a su límite en el dominio D.

M. Borel, supone en todos los casos que el pasaje al límite de la expresión que define la suma generalizada $e^{-a}\sigma(a, z)$ de una serie cualquiera; se efectúe sobre el eje real positivo, es decir, que el parámetro $a$ tiende a $+\infty$, por valores siempre reales.

Si en cambio adoptamos un camino rectilíneo distinto del semieje real, probaremos la sumabilidad (E) de la serie (1) en *todo el plano complejo* con la misma suma $\frac{1}{1-z}$.

En efecto, sea $\Delta$ una semirecta que partiendo del origen forme un ángulo fijo $\varphi$. Pongamos

$$a = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi), \qquad z = x + iy,$$

la condición necesaria y suficiente para que la expresión

$$c^{-a}\sigma(a, t) = \frac{1}{1-z} - \frac{e^{-a(1-z)}}{1-z},$$

tiende a un límite para $a \to \infty$ según la dirección $\Delta$, es que

$$R[a(1-z)] > 0,$$

luego resulta

$$\lim_{a\to\infty} e^{-a}\sigma(a, z) = \frac{1}{1-z}.$$

La suma de la serie (1) es la misma, no así, el campo de sumabilidad (E) que varía con $\varphi$. En efecto, se tiene:

$$R[a(1-z)] = R[\rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)(1 - x - iy)] > 0,$$

es decir,

$$\rho(1-x)\cos\varphi + \rho y \operatorname{sen}\varphi > 0$$

∴

$$(1-x)\cos\varphi + y \operatorname{sen}\varphi > 0. \tag{4}$$

Consideremos la recta $(\delta)$ de ecuación

$$(1-x)\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi = 0,$$

es decir,

$$y = x \operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{ctg}\varphi;$$

la cual pasa por el punto A (1, 0) cualpuiera que sea el valor de $\varphi$, y además es paralela a la recta que pasando por el origen, forma con el eje O$y$ un ángulo igual a $\varphi$.

Según la relación (4), el nuevo campo de sumabilidad (E) está formado por el conjunto de puntos $(x, y)$ que satisfacen a dicha condición, es decir, por todos los puntos situados en el semiplano que contiene el origen y limitado por la recta $(\delta)$.

Como caso particular, para $\varphi = 0$, la recta $(\Delta)$ coincide con el eje real positivo y la recta $(\delta)$ con la tangente en A (1, 0) al círculo de convergencia, llegando al mismo resultado ya encontrado.

Si $\varphi = \pi$, el campo dé sumabilidad es ahora el semiplano limitado por la tangente en (1, 0) y que *no* contiene el origen.

Haciendo variar $\varphi$ entre O y $2\pi$, la recta $(\delta)$ barre todo el plano complejo.

De aquí resulta, que fijado un punto cualquiera $z$ del plano complejo distinto del A (1, 0), podemos determinar siempre un camino rectilíneo $(\Delta)$, tal que tomando límite para $a \to \infty$ según la dirección $(\Delta)$; la región de sumabilidad (E) contiene dicho punto.

Se ve, que mediante este complemento introducido al método exponencial, nos permite ampliar notablemente el campo de sumación de la serie geométrica y de varias otras, en todo el plano complejo.

En consecuencia : *la serie geométrica es sumable* (E) *con suma* $\frac{1}{1-z}$. *en todo el plano complejo, y la sumación es uniforme en todo dominio finito interior al campo de sumabilidad.*

Razonando en idéntica forma sobre la serie

$$1 - z + t^2 - \dots \qquad |z| > 1 \tag{2}$$

podemos concluir que : *la serie* (2) *es sumable* (E) *en todo el plano complejo con suma igual a* $\frac{1}{1+z}$, *excepto en el punto singular* B (1, 0), *y la sumabilidad es además uniforme en todo dominio finito interior al campo de sumación* (E).

Sea la serie divergente

$$1 + z^2 + t^4 + \dots + z^{2n} + \dots \qquad |z| > 1, \tag{1}$$

cuya sumabilidad (E), se puede probar en la siguiente forma.

Hemos visto que las series

$$1 + z + z^2 + \dots \tag{2}$$

$$1 - z - z^2 - \dots \tag{3}$$

son sumable (E), la (1) en el semiplano que contiene el origen y limitada por la recta tangente al círculo de convergencia en el punto A (1, 0), con suma igual a $f_1(t) = \frac{1}{1-t}$; mientras la (2) lo es en el semiplano que contiene el origen y limitado por la tangente en el punto B (— 1, 0) con suma $f_2(t) = \frac{1}{1+z}$ cuando el parámetro $a$ tiende a $\infty$ por valores reales.

Sumando término a término las series (2) y (3) se obtiene la serie sumable (E)

$$2 + 2t^2 + 2t^4 + \dots$$

y cuya suma es igual a

$$f_1(z) + f_2(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} = \frac{2}{1-z^2}.$$

es decir,

$$2(1 + z^2 + z^4 + \dots) = \frac{2}{1-z^2},$$

por tanto, la suma de la serie (1) es

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2}.$$

El campo de sumabilidad (E) es la región común de sumación de las series (2) y (3), esto es, la faja formada por las tangentes $t_1$ y $t_2$ al círculo de convergencia en los puntos A (1, 0) y B (— 1, 0).

Si hacemos tender ahora $a \to \infty$ según un argumento $\varphi$ distinto de cero, la faja ante definida, barrerá todos el plano complejo, por tanto, la serie dada, es sumable (E) en todo este dominio.

Aplicando el proceso general llegamos al mismo resultado.

**9.** *Serie logarítmica.* — Consideremos la serie entera

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + \dots$$

convergente en todo punto del círculo de radio *uno* y centro en el origen. La serie (1) define en todo punto de su círculo de convergencia, la función $\log(1+z)$. Para todo $|z| > 1$, la serie es divergente.

Vamos a probar que la serie (1) es sumable (E) *en todo el plano complejo* con suma generalizada igual a $\log(1+z)$.

Consideremos la serie sumable (E)

$$1 - z + z^2 - \dots = \frac{1}{1+z}, \tag{2}$$

y fijado un rayo de sumabilidad $\Delta$ cualquiera, el semiplano de sumabilidad (E) de la serie (2) queda determinado en la forma indicada en el número anterior. Sea D una área finita cualquiera que contiene en su interior el origen O y situada en el campo de sumabilidad (E) antes definido; $c$ una curva simple que une el origen O con un punto cualquiera $z$ de D.

Como la serie (2) es uniformemente sumable (E) en el dominio D, es legítima su integración termino a término sobre la curva $c$ (teorema IX), es decir,

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^z z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1},$$

y la suma generalizada de la serie sumable (E) que resulte, es igual a la

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z} = \log(1+z).$$

Se tiene, entonces

$$\log(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \qquad (a)$$

en todo punto $z$ de la región D.

Es claro que de este modo, haciendo variar el semieje $\Delta$ podemos obtener la prolongación analítica de la serie (1) a todo el plano complejo.

Del mismo modo, integrando la serie uniformemente sumable (E)

$$1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1-z},$$

en una área (A) de su campo de sumabilidad, se obtiene la serie

$$\log \frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \qquad (b)$$

sumable (E) en el dominio (A).

Sumando miembro a miembro, las serie ($a$) y ($b$), se obtiene la serie

$$2\left(\frac{z}{1} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots\right)$$

sumable (E), en la región común a los dominios (D) y (A) y cuya suma generalizada vale

$$\log(1+z) + \log\frac{1}{1-z} = \log\frac{1+z}{1-z}.$$

**10.** *Serie arco tangente.* — Sea la serie entera

$$z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots \tag{1}$$

de la variable compleja $z = x + iy$. Su radio de convergencia es igual a la unidad. En todo punto $t$ interior al círculo de convergencia, la serie (1) define la función arc tang $z$, la cual admite como puntos singulares : $z = +1$ y $z = -1$ (puntos críticos logarítmicos).

Para todo valor de $z$ en módulo superior a 1, la serie es divergente. Probaremos que la serie es sumable (E) en todo el plano complejo.

Si en la serie sumable (E)

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \dots$$

cambiamos $z$ por $it$, se obtiene la serie sumable (E)

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots \tag{2}$$

cuya región de sumabilidad, es la faja formada por las tangentes al círculo de convergencia, en los puntos singulares $+i$ y $-i$, cuando el parámetro $a \to \infty$ por valores reales.

Consideremos ahora una región finita D de la faja antes definida y que contiene el origen O. Sea $c$ una curva cualquiera, toda ella interior al dominio D, que une O con un punto $z$ de D.

Integrando miembro a miembro la serie (2) a lo largo de $c$, se tiene

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n dz.$$

Por ser la serie (2) uniformemente sumable (E) en el dominio D, se puede permutar los símbolos $\int$ y $\sum$; resultando en consecuencia, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^z z^{2n} dz = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

sumable (E) en el arco D, y su suma generalizada es la función

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tang}\, z.$$

Finalmente, razonando como en los casos anteriores, se concluye la sumabilidad (E) de la serie (1) en todo el plano.

Todos estos resultados se pueden obtener también empleando el proceso general empleado para la serie geométrica.

SOBRE

# UN TEOREMA DE WEIERSTRASS-BOREL


Por J. C. VIGNAUX
Doctor en Ciencia matemática


---

**1.** En la Teoría de Funciones de variable compleja, existe un teorema fundamental debido a Weierstrass, el cual permite asegurar la convergencia uniforme, en el interior de un dominio cerrado, de una serie de funciones holomorfas, cuando ella converge uniformemente sobre el contorno de dicho dominio. M. Borel, en una breve Nota de *Compte rendus* (diciembre, 1905), enuncia *(sin demostrar)* una extensión de dicho teorema, a las series divergentes sumables con el método exponencial.

En esta Nota me propongo demostrar dicho teorema.

**2.** *Definiciones.* — Sea la serie divergente

$$f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_\nu(z) + \dots \qquad (1)$$

de funciones analíticas de una variable compleja $z$, definidas en un cierto dominio D. Se dice que la serie (1) es *sumable con el método exponencial* o simplemente *sumable* (E), cuando para cada punto $z$ del dominio D, la serie de potencia *(serie asociada)*

$$\sigma(a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(z) \frac{a^n}{n!}$$

donde

$$s_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(z),$$

es una *trascendente entera* respecto de la *variable real* $a \geq 0$; y si además existe y es finito el

$$\lim_{a \to \infty} e^{-a} \sigma(a, z) = f(z),$$

en todo punto $z$ del dominio D. La función $f(z)$ es la *suma generalizada* de la serie divergente (1).

Supongamos que la serie dada sea sumable (E) en todo un dominio D; diremos con Borel que ella es *uniformemente sumable con el método exponencial* o *uniformemente sumable* (E), en el dominio D; cuando se verifican las siguientes condiciones :

I) La serie asociada

$$\sigma(a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(z) \frac{a^n}{n!}$$

es *uniformemente convergente* cuando $z$ pertenece al dominio D y $a \geq 0$.

II) La expresión

$$e^{-a} \sigma(a, z),$$

tiende *uniformemente* a su límite $f(z)$, en todo punto $z$ del dominio D, para $a \to \infty$; esto es, dado un número positivo arbitrario $\varepsilon$, existe un número positivo A, tal que

$$|f(z) - e^{-a} \sigma(a, z)| < \varepsilon,$$

para todo $a \geq$ A, cualquiera que sea el punto $z$ del dominio D.

**3.** *Teorema. — Si una serie divergente de funciones holomorfas en un dominio cerrado* D

$$u_0(z) + u_1(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots \tag{1}$$

*es uniformemente sumable* (E) *sobre el contorno simple* C *que limita este dominio, ella es sumable uniformemente* (E) *en el dominio cerrado y la suma generalizada de* (1) *es una función holomorfa en el dominio abierto.*

En efecto, designando con $z$ un punto cualquiera del contorno C, se tiene según las hipótesis que :

$\alpha$) La serie asociada

$$\sigma(a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(z) \frac{a^n}{n!} \tag{2}$$

donde

$$U_n(z) = u_0(z) + u_1(z) + \ldots + u_n(z),$$

converge uniformemente *sobre el contorno* C, para cada valor de $a \geq 0$ fijo.

β) Existe el límite

$$f(z) = \lim_{a \to \infty} e^{-a} \sigma(a, z) \qquad (3)$$

y la convergencia es *uniforme sobre* C.

Según la condición (α), dado un número positivo ε arbitrario, se puede determinar un entero $p$, tal que para todo punto $z$ del contorno C y $a$ fijo, se verifique

$$|S_{n+q}(z, a) - S_n(z, a)| < \varepsilon \qquad \text{para } n > p,$$

donde

$$S_n(z, a) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} U_\nu \frac{a^\nu}{\nu!}.$$

Si $x$ es un punto cualquiera del dominio D, resulta

$$|S_{n+q}(x, a) - S_n(x, a)| \leq |S_{n+q}(z, a) - S_n(z, a)| < \varepsilon,$$

desde que el máximum del módulo de una función holomorfa en un dominio, se obtiene en un punto del contorno [1]. De aquí resulta que la serie (2) converge uniformemente en el dominio cerrado D hacia una función $\sigma(a, x)$.

Sea $D_1$ un dominio interior a D, limitado por un contorno $C_1$ sin puntos, común con C. La fórmula de Cauchy da para todo punto $x$ del dominio $D_1$ y $a > 0$ fijo

$$S_n(x, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{S_n(z, a)\, dz}{z - x}.$$

Sea $F(x, a)$ la función holomorfa en $D_1$ definida por la integral

$$F(x, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\sigma(a, z)\, dz}{z - x} \qquad a \text{ fijo} > 0$$

se tiene

$$F(x, a) - s_n(x, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\sigma(a, z) - S_n(a, z)}{z - x}\, dz.$$

[1] La función $U_n(x)$ es holomorfa en D, como suma de un número finito de funciones holomorfas : $u_0(x), \ldots, u_n(x), \ldots$, así como también lo son las funciones $U^n(x) \frac{a^n}{n!}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, donde $a$ es un número real fijo y positivo.

La mínima distancia entre los puntos de C y de $C_1$ es un número $\delta > 0$ y puesto que $x$ pertenece al dominio $D_1$ resulta

$$|\sigma(a, z) - S_n(a, z)| < \varepsilon$$

para $n > p$ y $a$ fijo; y además

$$|z - x| > \delta,$$

luego resulta

$$|F(x, a) - S_n(x, a)| < \frac{\varepsilon \, . \, L}{2\pi\delta} \qquad \text{para } n > p \text{ y } a \text{ fijo,}$$

donde L designa la longitud de $C_1$. De aquí resulta qne $S_n(x, a)$ tiene por límite para $n \to \infty$, la función $F(x, a)$; es decir, $\sigma(a, x) = F(a, x)$ es función holomorfa en el dominio $D_1$.

De la condición ($\beta$) resulta que dado un $\varepsilon$, existe un número $A > 0$ tal, que cualquiera que sea el punto $z$ sobre C, se verifica

$$|e^{-a_1}\sigma(a_1, z) - e^{-a_2}\sigma(a_2, z)| < \varepsilon \qquad \text{para } a_1 > A,\ a_2 > A,$$

y como $\sigma(a, z)$ es función holomorfa en el dominio $D_1$ para todo valor de $a$ fijo; resulta

$$|e^{-a_1}\sigma(a_1, x) - e^{-a_2}\sigma(a_2, x)| < \varepsilon \qquad \text{para } a_1 > A,\ a_2 > A;$$

por tanto, la expresión $e^{-a}\sigma(a, z)$ tiende uniformemente a su límite $f(x)$ en el dominio cerrado D.

De todo esto, se concluye que la serie (1) es también sumable uniformemente (E) en el dominio D.

Nos falta finalmente probar que la suma $f(z)$ es función holomorfa en el dominio abierto D.

Aplicando la fórmula de Cauchy a la función $\sigma(a, z)$ en el dominio D, resulta

$$\sigma(a, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)\,dz}{z - x},$$

luego

$$\varphi(x) - e^{-a}\sigma(a, x) = \frac{1}{1\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z) - e^{-a}\sigma(a, z)}{z - x}\,dz,$$

donde $x$ es un punto del dominio D, y teniendo presente según la condición ($\beta$) que

$$|f(z) - e^{-a}\sigma(a, z)| < \varepsilon$$

para $a > A$ y $z$ sobre C; resulta

$$| \varphi(x) e^{-a} \sigma(a, x) < \frac{L \cdot 2}{2\pi\delta}$$

para $a > A$ y donde L es la longitud del contorno $C_1$. De aquí resulta que la expresión $e^{-a}\sigma(a, x)$ tiene por límite la función $\varphi(x)$; luego $f(x) = \varphi(x)$ es holomorfa en $D_1$.

Con un razonamiento análogo se puede demostrar también que las series formadas con las derivadas de los términos de la serie dada, son uniformemente sumables (E) en el dominio abierto D y tienen por suma generalizada las derivadas de mismo orden de la función $f(x)$.

**4.** De este teorema se puede deducir una consecuencia importante.

Consideremos un dominio D en el cual la serie es uniformemente sumable (E) y supongamos además que en un cierto dominio D′ interior a D, ella sea *uniformemente convergente*. En tal caso la serie define por su *suma* una función analítica en el dominio D′, la cual coincide con la *suma generalizada* $f(z)$ de la serie dada. Como la función $f(z)$ es holomorfa en el dominio D, se concluye que : *la suma generalizada de una serie uniformemente sumable* (E) *en un dominio* D, *es cuando dicha serie resulta uniformemente convergente en una región* D′ *de* D, *la prolongación analítica en el dominio* D *de la función que la serie representa en* D′.

# SOBRE SERIES DIVERGENTES DE FUNCIONES ARMÓNICAS

Por J. C. VIGNAUX
Doctor en Ciencia matemática

---

## Introducción

Es bien conocida la importancia que tiene, en el Análisis y en la Física Matemática, la noción de función armónica y de series convergentes de tales funciones.

Existe en esta teoría un teorema fundamental enunciado por vez primera por Volterra y demostrado por Harnach, que permite asegurar la convergencia uniforme, en todo un dominio cerrado de una serie de funciones armónicas cuando ella converge uniformemente en el contorno del mismo.

En esta nota me propongo extender el método de *sumación exponencial* de Borel, a las series divergentes de funciones de dos o más variables reales independientes, y demostrar luego un teorema que constituye una generalización del teorema de Volterra-Harnach, a las series divergentes de funciones armónicas sumables con este proceso.

## El método exponencial de sumación

### I. FUNCIONES DE DOS VARIABLES REALES

**1.** *Definiciones.* — Sea la serie divergente

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}(x, y) \qquad (1)$$

de funciones de dos variables reales $x$, $y$ definidas en un cierto dominio D.

Diremos que la serie (1) es *sumable con el método exponencial* o simplemente *sumable* (E), cuando para cada punto $(x, y)$ del dominio D, la serie de potencia *(serie asociada)*.

$$\sigma(x, y, a) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x, y) \frac{a^n}{n!}$$

donde

$$s_n(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} f_\nu(x, y),$$

es una *trascendente entera* respecto de la variable real $a \geq 0$, y si además existe y es finito el límite siguiente

$$\lim_{a \to \infty} e^{-a} \sigma(x, y, a) = f(x, y),$$

en todo punto $(x, y)$ del dominio D.

La función $f(x, y)$ se llamará la *suma generalizada* de la serie divergente dada. Esta noción de suma de una serie no es contradictoria, con la definición clásica; puesto que : *si la serie* (1) *es convergente, también es sumable* (E), *con igual valor.*

En efecto; sea $(\xi, \eta)$ un punto cualquiera del campo de convergencia de la serie dada; se tiene, llamando con $f(x, y)$ la suma de la serie

$$f(\xi, \eta) = \lim_{n \to \infty} s_n(\xi, \eta)$$

donde

$$s_n(\xi, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(\xi, \eta),$$

es decir, dado un número positivo $\varepsilon$ arbitrariamente pequeño, se puede determinar un entero positivo $p$, tal que

$$|s_n(\xi, \eta) - f(\xi, \eta)| < \varepsilon$$

para $n \geq p$.

Por otra parte, se tiene

$$e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} s_n(\xi, \eta) \frac{a^n}{n!} - f(\xi, \eta) = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} [s_n(\xi, \eta) - f(\xi, \eta)] \frac{a^n}{n!},$$

de donde resulta

$$\left| e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} s_n(\xi, \eta) \frac{a^n}{n!} - f(\xi, \eta) \right| \leq e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} | s_n(\xi, \eta) - f(\xi, \eta) | \frac{a^n}{n!}.$$

Además, el segundo miembro de esta desigualdad se puede escribir así :

$$e^{-a}\sum_{n=0}^{n=p}|s_n(\xi,\eta)-f(\xi,\eta)|\frac{a^n}{n!}+e^{-a}\sum_{n=p+1}^{\infty}|s_n(\xi,\eta)-(\xi,\eta)|\frac{a^n}{n!},$$

pero como

$$\lim_{a\to\infty} e^{-a}\sum_{n=0}^{n=p}|s_n(\xi,\eta)-f(\xi,\eta)|\frac{a^n}{n!}=0,$$

resulta que existe un número A positivo tal que para $a \geq A$, se tiene

$$e^{-a}\sum_{n=0}^{p}|s_n(\xi,\eta)-f(\xi,\eta)|<\varepsilon$$

para $a \geq A$, y además se tiene

$$e^{-a}\sum_{n=p+1}^{\infty}|s_n(\xi,\eta)-f(\xi,\eta)|\frac{a^n}{n!}<\varepsilon\,.\,e^{-a}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}<\varepsilon.$$

De aquí resulta

$$\left|\left(e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}s_n(\xi,\eta)\frac{a^n}{n!}\right)-f(\xi,\eta)\right|<\varepsilon,$$

es decir,

$$\lim_{a\to\infty} e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}s_n(\xi,\eta)\frac{a^n}{n!}=f(\xi,\eta),$$

lo cual prueba la sumabilidad (E) de la serie dada con suma generalizada igual a $f(\xi,\eta)$, en un punto $(\xi,\eta)$; por tanto en todo punto del campo de convergencia.

*Sumabilidad uniforme.* — Supuesta la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x,y)$$

sumable (E) en todo un dominio (D), se dirá que es *uniformemente sumable* (E) en D, cuando se verifican las siguientes condiciones :

A) La serie asociada

$$\sigma(x,y,a)=\sum_{n=0}^{\infty}s_n(x,y)\frac{a^n}{n!},$$

es uniformemente convergente para cada valor de $a \geq 0$, y el punto $(x, y)$ del dominio D;

B) La expresión

$$e^{-a}\sigma(x, y, a)$$

tiende uniformemente a su límite $f(x, y)$ en el dominio D, cuando $a \to \infty$, esto es; dado un número positivo $\varepsilon$ arbitrario, existe un número positivo A, tal que

$$| f(x, y) - e^{-a}\sigma(x, y, a) | < \varepsilon$$

para $a > A$, cualquiera que sea el punto $(x, y)$ del dominio D.

Todas estas definiciones se extienden del mismo modo a las series de funciones de $n$ variables.

Entre estas series de funciones de dos variables reales, ofrecen particular interés, aquellas cuyos términos son funciones armónicas.

## II. SERIES DE FUNCIONES ARMÓNICAS

**2.** *Funciones armónicas.* — Se dice que una función $u(x, y)$ de dos variables reales $x$ e $y$ definida en un dominio D, es *armónica* en el mismo, si ella es finita y continua y además satisface en todos los puntos de D a la ecuación de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Demostraremos el siguiente teorema que constituye una extensión del clásico teorema de Volterra-Harnach a las series de funciones armónicas sumables (E).

*Teorema de Harnach generalizado. — Si la serie de funciones armónicas*

$$u_0(x, y) + u_1(x, y) + \ldots + u_n(x, y) + \ldots \tag{1}$$

*en un recinto* D, *es sumable uniformemente* (E) *sobre su contorno* (C); *ella es uniformemente sumable* (E) *en el dominio* D *y su suma generalizada es función armónica.*

Llamando con $(\xi, \eta)$ un punto cualquiera del contorno C, de la sumabilidad uniforme (E) de la serie (1) sobre C, resulta que fijado un valor de $a > 0$ la serie asociada

$$u(\xi, \eta, a) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(\xi, \eta) \frac{a^n}{n!}, \tag{2}$$

es uniformemente convergente cuando el punto $(\xi, \eta)$ describe la curva C; es decir, dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un entero $n > 0$, *independiente* de $a$, $\xi$, $\eta$, tal que para cada entero $p$ resulta

$$\left| s_n(\xi, \eta) \frac{a^n}{n!} + \dots + s_{n+p}(\xi, \eta) \frac{a_{n+p}}{(n+p)!} \right| < \varepsilon \tag{3}$$

cuando $(\xi, \eta)$ pertenece a C y $a \geq$ fijo.

Además como la suma de $n$ funciones armónicas

$$s_n(\xi, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} u_\nu(\xi, \eta),$$

es función armónica, así como también el producto : $s_n(\xi, \eta) \frac{a^n}{n!}$ para cada valor fijo de $a$; el primer miembro de la expresión (3) es función armónica en C.

Se tiene, en consecuencia,

$$\left| s_n(x, y) \frac{a^n}{n!} + \dots + s_{n+p}(x, y) \frac{a_{n+p}}{(n+p)!} \right| < \varepsilon$$

para todo punto $(x, y)$ del dominio D; puesto que una función armónica asume su valor máximum sobre el contorno C. Por tanto, la serie asociada (2) es uniformemente convergente en todo punto interior a D.

La función $u(x, y, a)$ es armónica en el dominio D para cada valor fijo de $a \geq 0$. Sea $(\delta)$ un círculo cualquiera contenido todo el en el dominio D y P un punto interior a $(\delta)$ de coordenadas $(x, y)$; según la fórmula de Poisson, se tiene

$$s_i(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{(\delta)} S_i \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2} ds,$$

donde $S_i$ son los valores de $s_i$ en los puntos de la circunferencia $(\delta)$. De aquí resulta

$$u(x, y, a) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i(x, y) \frac{a^i}{i!}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} \int_{(\delta)} S_i \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2} ds.$$

Pero por ser la serie

$$\sum_0^\infty S_i \frac{a^i}{i!},$$

uniformemente convergente sobre $\delta$, la permutación de los símbolos $\int$ y $\sum$ es legítimo, luego

$$u(x, y, a) = \frac{1}{2\pi}\int_{(\delta)}\left(\sum_{i=0}^{\infty} S_i \frac{a^i}{i!}\right)\frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2}\, ds.$$

De aquí resulta que la función $u(x, y, a)$ es función armónica en $(\delta)$ y por tanto en todo el dominio D.

Finalmente, de la convergencia uniforme del límite

$$u(\xi, \eta) = \lim_{a\to\infty} e^{-a} u(\xi, \eta, a)$$

sobre el contorno C, se sigue que, dado un $\varepsilon > 0$ existe un número positivo A *independiente* de $x$ e $y$, tal que para cada $a > A$, resulta

$$|e^{-a} u(\xi, \eta, a) - u(\xi, \eta)| < \varepsilon. \qquad (4)$$

La función $e^{-a} u(\xi, \eta, a)$, siendo armónica para cada valor de $a$ fijo, toma su valor máximum sobre el contorno C; luego la desigualdad (4) se verifica en todo punto $(x, y)$ interior a C; de donde resulta que $e^{-a} u(x, y, a)$ *converge uniformemente* hacia su límite $u(x, y)$ en el dominio D para $a \to \infty$.

Teniendo presente el resultado anterior, se concluye que la serie dada es sumable uniformemente (E) en el dominio (D).

Nos falta probar finalmente que la suma generalizada de la serie dada $u(x, y)$ es también función armónica.

Se tiene, en efecto,

$$u(x, y) = \lim e^{-a} \sum_{i=0}^{\infty} s_i(x, y)\frac{a^n}{n!}$$

$$= \lim_{a\to\infty} e^{-a}\left[\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a^{ix}}{i!}\right]\int_{(\delta)} S_i \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2}\, ds.$$

Siendo la serie $\sum_{0}^{\infty} S_i \frac{a^i}{i!}$ uniformemente convergente sobre la circunferencia $(\delta)$, la permutación de los símbolos $\int$ y $\sum$ es legítimo; es decir.

$$n(x,y) = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{(\delta)}\left(e^{-a}\sum_{i=0}^{\infty} S_i \frac{a^i}{i!}\right)\frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2}\, ds,$$

de donde

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{(\delta)} \lim_{a \to \infty} \left( e^{-a} \sum_{i=0}^{\infty} S_i \frac{a^i}{i!} \right) \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{(\delta)} U(x, y) \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2} ds,$$

donde $U(x, y)$ representa la suma generalizada de la serie (1) sobre la circunferencia ($\delta$).

La función $u(x, y)$ estando representada por una integral de Poisson, es armónica en (C), y por tanto, en el dominio D.

Todas estas definiciones y teoremas se extienden inmediatamente al caso de funciones de tres variables independientes.

# DERIVADAS SUCESIVAS GENERALIZADAS

Por el doctor B. IG. BAIDAFF

La literatura matématica es rica en contribuciones al estudio del concepto de derivadas generalizadas, concepto variable con los distintos matemáticos. De las últimas producciones, quizás la más importante es la del señor A. Marchaud, *Sur les dérivées et sur les différences des fonctions des variables réelles* (*Jour. Math. Pur. et Appl.*, 9 serie, t. 6, año 1927, pág. 337) a la cual le precedieron sus notas : *Différences et dérivées* y *Différences et dérivées d'une fonction de deux variable* (*Compt. Rend.*, t. 178, año 1924, págs. 1057 y 1467, respectivamente), en la primera de las cuales cita la siguiente aplicación de sus teorias :

«Si une fonction continue $f(x)$ admet en tout point d'un intervalle, une dérivée seconde généralisée

$$f_2(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

bornée (continue) dans l'intervalle, la dérivée seconde $f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$ existe «presque partout» (partout) et coïncide avec $f_2$ la où elle existe. Le théorème de Schwartz est un cas particulier de cette dernier proposition.»

Los lectores podrán encontrar en los números de los últimos años de la *Revista Matemática*, de los *Anales de la Sociedad Científica Argentina* varios artículos publicados por el doctor J. C. Vignaux (ver Bibliografía en los *Ànales de la Sociedad Científica Argentina,* t. CII, pág. 198), en los cuales introduce una serie de tipos de derivadas : simétrica, leibnitziana, schwarziana.

Sobre estas últimas dos corresponde hacer la siguiente observación importante :

Las llamadas derivadas segundas leibnitziana y schwarziana derivan de una misma norma :

$$\frac{f(x+h_1+h_2)-f(x+h_1)-f(x+h_2)+f(x)}{h_1 h_2}$$

particularizando la manera de pasar a los límites de $h_1$ y $h_2$.

En efecto, si en esa norma se hace $h_1 = h_2 = h$, se encontrará

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} = \mathrm{L}f(x)$$

(ver los *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, t. CII, pág. 180) por cuanto al significado de $\mathrm{L}f(x)$, y si se pone $h_1 = -h_2 = h$, se tiene :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x)-f(x+h)-f(x-h)+f(x)}{-h^2} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = \mathrm{S}f(x)$$

(por cuanto al significado de $\mathrm{S}(x)$ ver *loc. cit.*, pág. 182).

Pasemos ahora a la norma de tercer orden

$$\frac{f(x+h_1+h_2+h_3)-\Sigma f(x+h_1+h_2)+\Sigma f(x+h_1)-f(x)}{h_1 h_2 h_3},$$

ésta nos da para las hipótesis

$$h_1 = h_2 = h_3 = h$$

$$h_1 = h_2 = -h_3 = h$$

$$h_1 = -h_2 = -h_3 = h$$

$$-h_1 = -h_2 = -h_3 = h$$

respectivamente las cuatro categorías de derivadas de tercer orden :

$$f_1''' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)}{h^3}$$

$$f_2''' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h)-3f(x+h)+3f(x)-f(x-h)}{h^3}$$

$$f_3''' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 3f(x) + 3f(x-h) - f(x-2h)}{h^3}$$

$$f_4''' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h)}{h^3}.$$

Las primeras dos especies pueden equipararse con el tipo de derivada llamada *derivada por la derecha* y las últimas dos con el tipo de derivada llamada *derivada por la izquierda.*

A resultados análogos conduce la norma de cuarto orden

$$\frac{(\Delta_1 - 1)(\Delta_2 - 1)(\Delta_3 - 1)(\Delta_4 - 1) f(x)}{h_1 h_2 h_3 h_4},$$

en la cual el numerador simboliza la expresión

$$(\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 - \Sigma\, \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 + \Sigma\, \Delta_1 \Delta_2 - \Sigma\, \Delta_1 + 1) f(x)$$

entendiendo por el símbolo

$$\Sigma\, \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_p f(x)$$

la expresión general

$$\Sigma f(x + h_1 + h_2 + \ldots + h_p)$$

extendida sobre todas las combinaciones simples entre $n$ incrementos dados con anticipación; se encuentra que :

*La norma de cuarto orden nos conduce a cinco especies de derivadas de cuarto orden, dos del tipo por la derecha, dos del tipo por la izquierda y una de tipo intermedio,* y en general,

*A una función $f(x)$ le corresponde $n+1$ tipos de derivadas de orden $n$, de las cuales* $E\left[\frac{n+1}{2}\right]$ *del tipo de derivada por la izquierda, otro tantas del tipo de derivada por la derecha y* $\frac{1+(-1)^n}{2}$ *de tipo intermedio (a la Schwarz).*

Esta conclusión abre nuevos horizontes de investigación :

1° Estudio de las $n+1$ derivadas de orden $n$ correspondientes a una función $f(x)$, para las cuales conviene por ahora adoptar el símbolo $D_{n,i} f(x)$, con $i = 1, 2, 3, \ldots, n+1$ ;

2° Comparación de las funciones

$$D_{n,1} f(x), \qquad D_{n,2} f(x), \qquad \ldots, \qquad D_{n,n+1} f(x),$$

con las funciones

$$D_{n-p,1}D_{p,1}f(x),\quad D_{n-p,2}D_{p,1}f(x),\quad \ldots,\quad D_{n-p,n-p+1}D_{p,1}f(x),$$

$$D_{n-p,1}D_{p,2}f(x),\quad D_{n-p,2}D_{p,2}f(x),\quad \ldots,\quad D_{n-p,n-p+1}D_{p,2}f(x),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

3° Estudio de las propiedades de las funciones entre cuyas derivadas generalizadas existen ciertas relaciones dadas, etc.

Diciembre 15 de 1927.

# LAS LATITUDES CRECIENTES CONSIDERADAS COMO LOGARITMOS

## Y SUS PRINCIPALES APLICACIONES

### ESPECIALMENTE A LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DEL TRIÁNGULO DE POSICIÓN

POR ÁNGEL PÉREZ

*(Conclusión)*

---

**71.** Si del cálculo previo del *azimut* Z hubiera resultado que *éste* fuera menor que el *horario* H, operaríamos con la analogía ($b$) y *pari passu,* llegaríamos a las fórmulas mercatoriales que siguen :

$$\text{co}\lambda\,(y) = \text{co}\lambda\,[\text{Z}] - \text{co}\lambda\,(\text{H}), \qquad (\alpha')$$

$$\text{co}\lambda\,(z - \Delta) = \lambda\,(l) + \lambda\,(y). \qquad (\beta')$$

De $z - \Delta = v'$ sigue $z = \Delta + v'$, $a = 90^\circ - (\Delta + v')$, en general, y si $z = 90^\circ + a$, $a = (\Delta + v)' - 90^\circ$.

**72.** *Ejemplos.* — 1° Sean

$$l = 25^\circ 30' 15''\ \text{S}, \qquad \Delta = 132^\circ 45' 20'', \qquad \text{H} = 23^\circ 44' 32'',$$

$$\text{Z} = \text{N}\ 161^\circ 52' 40''\ \text{E}.$$

Aquí es $\text{Z} > \text{H}$, luego será también $\Delta > z$ y corresponderán las fórmulas

$$\text{co}\lambda\,(x) = \text{co}\lambda\,(\text{H}) - \text{co}\lambda\,(\text{Z}), \qquad \text{co}\lambda\,(\Delta - z) = \lambda\,(l) + \lambda\,(x),$$

$$\begin{array}{rr} co\lambda\,(H) = & 5361{,}73 \\ co\lambda\,(Z) = - & 6311{,}19 + \\ \hline co\lambda\,(z) = & 11672{,}92 \\ & 5{,}21 \\ & 2{,}29 \end{array}$$

$$\lambda\,(x)\ \text{tab.} = 230{,}42$$
$$\lambda\,(x) = 230{,}57$$

$$\begin{array}{rr} \lambda\,(l) = & 1583{,}44 \\ \lambda\,(x) = & 230{,}57 \\ \hline co\lambda\,(\Delta - z) = & 1814{,}01 \\ & 29 \\ \hline & 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \Delta - z = & 61°\ \ 4'44'' \\ \Delta = & 132\ \ 45\ 20 \\ \hline z = & 71°40'36'' \\ & 90 \\ \hline a = & 18°19'24'' \end{array}$$

2° Se dan

$$l = 33°25'40'',$$
$$d = 36°41'25'',$$
$$H_a = 6^h 26^m 10^s,$$
$$Z = N\ 53°39'30''\ O,$$
$$\Delta a = 51°18'35''.$$

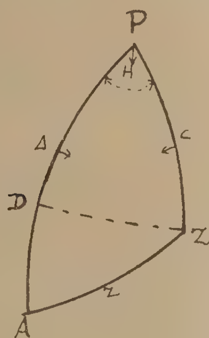



Figura 10

En este caso es $H > Z$, por tanto, $z > \Delta$ y corresponden las fórmulas

$$co\lambda\,(x) = co\lambda\,(Z) - co\lambda\,(H),$$
$$co\lambda\,(z - \Delta) = \lambda\,(l) + \lambda\,(x),$$

$$\begin{array}{rr} co\lambda\,(Z) = & 2347{,}38 \\ co\lambda\,(H) = - & 393{,}35 + \\ \hline & 2736{,}73 \\ & 83 \\ \hline & 10 \end{array}$$

$$co\lambda\,(x) = 3341{,}98$$

$$\lambda(x) = 3341{,}98$$
$$\lambda(l) = 2130{,}21$$
$$\text{co}\lambda(Z - \Delta) = 5472{,}19$$
$$73$$
$$54$$

$$Z - \Delta = 23°00'43''$$
$$\Delta = 51\ 18\ 35$$
$$Z = 74°19\ 18$$
$$90$$
$$a = 15°40'42$$

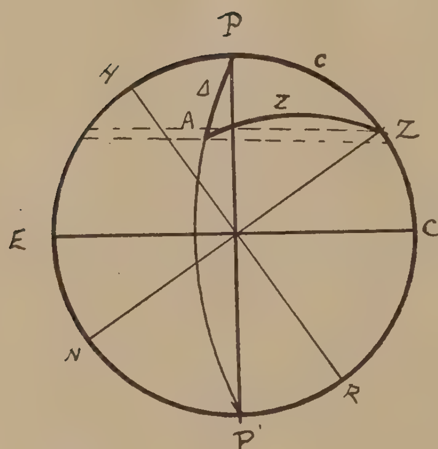



Fig. 11

**73.** Tratemos ahora de contrastar operando con fórmulas más conocidas.

1° Empecemos calculando $a$ por una fórmula fundamental con logaritmos de Gauss.

$$\cos z = \cos c \cos \Delta + \text{sen}\, c\, \text{sen}\, \Delta \cos P$$

o bien

$$\text{sen}\, a = \text{sen}\, l\, \text{sen}\, d + \cos l \cos d \cos P.$$

$$\log \operatorname{sen} l = 9{,}63405$$
$$\log \operatorname{sen} d = 9{,}8317\bar{9}\ (n)$$
$$\log 1^{er} \text{ térm.} \quad 9{,}46584$$
$$\text{térm. mayor} \quad 9{,}78292$$
$$\text{arg. de subst.} = 1{,}68292$$
$$\log \text{ap. de subst.} = 0{,}28470$$
$$pp\ 0{,}9293 = \quad 86$$
$$\log \text{subst.} = 0{,}28556$$

$$\log \cos l = 9{,}95547$$
$$\log \cos d = 9{,}86585$$
$$\log \cos P = 9{,}96160$$
$$\log 2^{\circ} \text{ térm.} = 9{,}78292$$
$$\log \text{subst.} \quad 0{,}28556$$
$$\log \operatorname{sen} a = 9{,}49736$$
$$30$$
$$6$$

$$a = 18^{\circ}19'10''$$

2° Si empleamos la fórmula que liga cuatro elementos consecutivos del triángulo esférico,

$$\operatorname{cotg} z \operatorname{sen} c = \cos c \cos Z + \operatorname{sen} Z \operatorname{cotg} P$$

o bien la dispondremos como sigue :

$$\operatorname{tg} a \cos l = \operatorname{sen} l \cos Z + \operatorname{sen} Z \operatorname{cotg} P$$

$$\operatorname{tg} a \cos l = \operatorname{sen} l \left[\cos Z + \operatorname{sen} Z \frac{\operatorname{cotg} P}{\operatorname{sen} l}\right],$$

y haciendo

$$\frac{\operatorname{cotg} P}{\operatorname{sen} l} = \operatorname{cotg} x. \tag{1}$$

será, después de dividir por $\cos l$

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} l \left[\cos Z + \operatorname{sen} Z \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right] = \operatorname{tg} l \frac{\operatorname{sen}[Z + x]}{\operatorname{sen} x}. \tag{2}$$

Operando con la (1) y (2) y con tablas de cinco cifras de mantisa se halló $a = 18^{\circ}16'10''$, lo que da una diferencia de $3'14''$ respecto al valor mercatorial.

3° Por descomposición del triángulo oblicuángulo en dos triángulos rectángulos, hemos obtenido el mismo valor que con logaritmos de Gauss se encontró antes.

Este procedimiento, práctico y claro, de que tratamos en nuestra *Tercera disquisición* publicadas en estos *Anales,* se desarrolla así.

Bajemos el perpendículo desde Z al lado Δ, y suponiendo que caiga en D, tendremos los dos triángulos esféricos rectángulos en D, ZDP y ADZ. En el primero se conocen $c$ y P y podremos determinar PD por la relación

$$\operatorname{tg} PD = \operatorname{tg} c \cos P = \operatorname{cotg} l \cos P. \qquad (1)$$

Hallado PD, si resulta menor que Δ (con los datos del problema es PD menor que Δ), la diferencia Δ — PD nos dará el segundo segmento AD. Con el primer segmento PD $= s_1$ y el segundo AD $= s_2$, aplicando la relación entre segmentos y lados que es :

$$\cos s_1 : \cos s_2 = \cos c : \cos a = \operatorname{sen} l : \operatorname{sen} a,$$

calcularemos sen $a$, y por tanto $a$.

Para certificarnos de la exactitud de esa proporción, recordemos que :

$$\cos c = \cos PD \,.\, \cos ZD, \qquad \cos Z = \cos AD \cos ZD,$$

y de estas por división viene

$$\cos c : \cos z = \cos PD \div \cos AD = \cos s_1 : \cos s_2,$$
$$\operatorname{sen} l : \operatorname{sen} a : \cos s_1 : \cos s_2.$$

Si el perpendículo cayera fuera de la base, y eso lo indicará la relación (1) en cada caso, el segundo segmento sería PD′ — Δ, subsistiendo la proporción anterior.

| | | |
|---|---|---|
| ΔZDP | log cotg $l$ = | 0,32142 |
| | log cos P = | 9,96160 |
| | | 0,28302 |
| | | 291 |
| | | 11 |
| | PD = | 62°28′22″ |
| | Δ = | 132 45 20 |
| | AD = | 70°16′56″ |

$$\log \operatorname{sen} l = 9{,}63405$$
$$\log \cos s_2 = 9{,}52812$$
$$\log \sec s_1 = 0{,}33520$$
$$\log \operatorname{sen} a = 9{,}49737$$
$$30$$
$$7$$
$$a = 18°19'11''$$

4° La analogía de Neper

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\Delta - Z) = \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}[Z - H]}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}[Z + H]}$$

con las mismas tablas dió

$$a = 18°19'25''$$

que se diferencia en 1″ del valor mercatorial.

5° Pero lo que nos asombra por el resultado inesperado, y la dificultad para explicarlo, es el obtenido con la relación de los senos; pues difiere en más de 12′ con el que se obtiene por los métodos de que se acaba de tratar.

He aquí el cálculo con tablas corrientes; las de siete decimales mejoran muy poco el resultado.

De $\operatorname{sen} Z : \operatorname{sen} \Delta = \operatorname{sen} P : \operatorname{sen} z$ sale

$$\operatorname{sen} z = \frac{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} P}{\operatorname{sen} Z},$$

$$\log \operatorname{sen} z = \log \operatorname{sen} \Delta + \log \operatorname{sen} P + \log \operatorname{cosec} Z,$$

$$\log \operatorname{sen} \Delta = 9{,}86285$$
$$\log \operatorname{sen} P = 9{,}60489$$
$$\log \operatorname{cosec} Z = 0{,}50718$$
$$\log \operatorname{sen} z = 9{,}97792$$
$$z = 71°53'$$
$$90$$
$$a = 18°07'$$

Igual resultado con las tablas de Vázquez Lusipo (6 decimales).

¿Cabe suponer que tengan equivocado algún logaritmo tratándose de ediciones estereotipadas? Hemos repetido el cálculo varias veces

en distintos días y siempre hemos hallado el mismo resultado obsesionante. Tampoco intervienen en este ejemplo arcos cuyos logaritmos seno o coseno ocasionen cierta indeterminación por la pequeña de sus variaciones. ¿Cuál puede ser la causa de esta anomalías? Diganla quienes tengan mayor cultura matemática que la deficiente nuestra.

**74.** Y ponemos a contrastar el segundo ejemplo.

1° Empecemos por la fórmula de los senos.

$$\operatorname{sen} z = \frac{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} P}{\operatorname{sen} Z};$$

$$\log \cos a = \log \operatorname{sen} \Delta + \log \operatorname{sen} P + \operatorname{colog} \operatorname{sen} Z,$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} \Delta &= 9{,}8923932 \\ \log \operatorname{sen} P &= 9{,}9971632 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} Z &= 0{,}0939388 \\ \hline \log \operatorname{sen} z &= 9{,}9834952 \\ & \phantom{9{,}98349}32 \\ \hline & \phantom{9{,}98349}20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 74°18'13'' \\ & \phantom{=} 90 \\ \hline a &= 15°41'47'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_m &= 15°40'42'' \\ a_s &= 15\ \ 41\ 27 \\ \hline \text{Dif.} &= \phantom{15°4} 1'05'' \end{aligned}$$

2° Aplicando la fórmula $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} d \operatorname{sen} l + \cos d \cos l \cos H$, calculable con logaritmo de Gauss, se halló $a_y = 15°40'24''$ que difiere en 18″ de $a_m = 15°40'42''$.

3° La fórmula de cuatro elementos consecutivos

$$\frac{\operatorname{cotg} P}{\operatorname{sen} l} = \operatorname{cotg} y \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} l \frac{\operatorname{sen}(Z + y)}{\operatorname{sen} y} \tag{2}$$

dió con tablas de mantisa de cinco cifras $a_1 = 15°40'4''$ con una diferencia por defecto de 38″.

4° Vamos ahora a descomponer el triángulo en otros dos, bajando

el perpendículo. Este debe trazarse desde el extremo de un lado que sea dato y que con el otro extremo forme un ángulo conocido (dato también). Podremos trazarlo desde P o desde Z. sea P el vértice elegido. No podemos predecir en este caso si el perpendículo caerá en $z$ o en su prolongación, pero el cálculo va a determinar su posición. En el triángulo esférico rectángulo en D, calculemo el ángulo ZPD = V, por la relación

$$\cos c = \operatorname{cotg} Z \,.\, \operatorname{cotg} V_1$$

$\therefore$

$$\operatorname{cotg} V_1 = \cos c \operatorname{tg} Z = \operatorname{sen} l \operatorname{tg} Z. \quad (1)$$

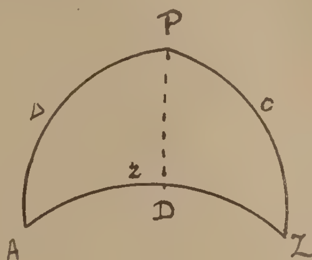



Figura 12

Si $V_1$ resulta mayor que P, el perpendículo cae fuera de la base ZA, si por el contrario, $V_1$ es menor que P, el perpendículo cae dentro de AZ, por ejemplo, en D.

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} l &= \bar{1},740989 \\ \log \operatorname{tg} Z &= 0,133303 \\ \hline \log \operatorname{cotg} V_1 &= \bar{1},874292 \\ & \phantom{=\bar{1},874}484 \\ & \phantom{=\bar{1},874}192 \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad V_1 = 53°10'44''$$

Como $V_1$ resultó menor que P, el perpendículo es interior y

$$V_2 = P - V_1 = 43°21'46''.$$

Hallemos ahora el primer segmento $s_1 = ZD$ por la relación

$$\operatorname{tg} c \cos Z = \operatorname{tg} s_1, \qquad \text{o bien} \qquad \operatorname{cotg} l \cos Z = \operatorname{tg} s_1, \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{cotg} l &= 0,180408 \\ \log \cos Z &= \bar{1},772761 \\ \hline \log \operatorname{tg} s_1 &= \bar{1},953169 \\ & \phantom{=\bar{1},95316}7 \\ & \phantom{=\bar{1},95316}2 \end{aligned}$$

$$s_1 = 41°55'1''$$

Ahora por la proporción

$$\operatorname{tg} V_1 : \operatorname{tg} V_2 = \operatorname{tg} s_1 : \operatorname{tg} s_2 \qquad (3)$$

se hallará el segundo segmento $s_2$.

Para justificar esa proporción observamos que en los triángulos rectángulos en D se tiene :

$$\operatorname{tg} s_1 = \operatorname{sen} p \operatorname{tg} V_1, \qquad \operatorname{tg} s_2 = \operatorname{sen} p \operatorname{tg} V_2,$$

y de éstas resulta la verdad de la (3); luego

$$\operatorname{tg} s_2 = \operatorname{tg} V_2 \operatorname{tg} s_1 \operatorname{cotg} V_1 \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} V_2 &= \bar{1},975167 \\ \log \operatorname{tg} s_1 &= \bar{1},953171 \\ \log \operatorname{cotg} V_1 &= \bar{1},874290 \\ \hline \log \operatorname{tg} s_2 &= \bar{1},802628 \\ & \quad 513 \\ & \quad 115 \\ s_2 &= 32°24'25'' \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} s_1 &= 41°55'\ 1'' \\ s_2 &= 32\ \ 24\ 25 \\ \hline s_1 + s_2 = z &= 74°19'26'' \\ & \quad 90 \\ \hline a &= 15°40'34'' \end{aligned}$$

Esta altura se diferencia de la mercatorial en 8''.

**75.** *Aplicación. — Dada la hora de un lugar, determinar la latitud por medio de la altura de un astro.*

Si para la resolución de este problema, deseamos emplear los mercatoriales, necesitamos de antemano calcular el *azimut*. Este cálculo puede efectuarse, en general, de una manera muy sencilla.

En efecto, si hacemos uso de la fórmula de los senos, se tendrá :

$$\frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} H} = \frac{\operatorname{sen} \Delta}{\operatorname{sen} Z} \quad \text{o} \quad \frac{\cos a}{\operatorname{sen} H} = \frac{\cos d}{\operatorname{sen} Z}; \qquad \operatorname{sen} Z = \frac{\operatorname{sen} H \cos d}{\cos a}.$$

Esta expresión tiene el inconveniente de que deja mal determinado el azimut por convenir al seno dos valores, suplemento uno del valor tabular calculado, pero esta indeterminación puede resolverse la ma-

yor parte de las veces en la práctica atendiendo a las siguientes consideraciones :

1ª Si $l$ y $d$ son de especie contraria, el azimut de 90° solo puede tener lugar bajo el horizonte, y desde el otro al ocaso es menor de 90° a partir del punto cardinal de igual nombre que la declinación $d$; luego a toda altura observada corresponde un azimut menor que 90°, a partir del punto cardinal correspondiente al polo depreso;

2ª Si $l$ y $d$ son de la misma especie y $d > l$, en este caso el astro es de los llamados circumpolares y su azimut está comprendido entre límites menores que 90° a partir del punto cardinal correspondiente al polo elevado; luego será siempre mayor que 90°, contándolo a partir del polo depreso;

3ª Si $l$ y $d$ son de la misma especie y $d < l$, hay ambigüedad, pues, pasando el astro por el vertical primario sobre el horizonte, su azimut en el momento de la observación puede ser mayor, igual o menor que 90°. Desde que nace el astro hasta que cruza el vertical primario del este, y desde que cruza el vertical primario del oeste hasta que se pone, su altura es evidentemente menor que en el vertical primario, y en azimut es como el del este y del ocaso, menor que 90°, a partir del punto cardinal de igual nombre que la declinación; en el vertical primario el azimut vale 90°, y después de pasar el astro el vertical primario del este y antes de pasar por el primer vertical del oeste, su altura es mayor que en los verticales primarios, y su azimut es mayor que 90°. En resumen, si la altura observada es menor que la que corresponde al astro en el vertical primario, el azimut es menor que 90° a partir del punto cardinal correspondiente al polo elevado, o sea mayor que 90° a partir del punto cardinal correspondiente al polo depreso; y si la altura observada es mayor que la que tiene el astro en el vertical primario, el azimut es, al contrario, menor que 90° a partir del punto cardinal correspondiente al polo depreso. Se consignan de este doble modo las reglas, porque muchos calculadores estiman el azimut a partir del punto P′ (polo depreso) siendo entonces, P′ZA suplemento del ángulo azimutal del triángulo de posición.

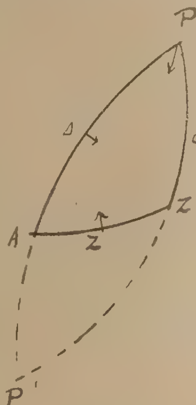


Figura 13

Pero se dirá ¿qué utilidad podemos sacar de esas reglas, cuando desconocemos la latitud, puesto que nos proponemos calcularla?

En realidad, el observador rara vez la desconoce del todo. El máximo la conoce, siempre, pero a menos de cálculo especial, *groso modo.*

Por otra parte, los datos del problema permiten calcular fácilmente el azimut, si bien valiéndose de una fórmula que en ese caso resulta ambigua. Pero en el terreno de la práctica no es difícil discriminar el valor (o valores) que conviene al azimut.

**76.** He aquí la fórmula de que partimos para el cálculo de la latitud :

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\Delta - z)}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[Z - H]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[Z + H]} = \frac{\operatorname{sen}\frac{Z}{2}\cos\frac{H}{2} - \cos\frac{Z}{2}\operatorname{sen}\frac{H}{2}}{\operatorname{sen}\frac{Z}{2}\cos\frac{H}{2} + \cos\frac{Z}{2}\operatorname{sen}\frac{H}{2}} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{cotg}\frac{Z}{2}\operatorname{tg}\frac{H}{2}}{1 + \operatorname{cotg}\frac{Z}{2}\operatorname{tg}\frac{H}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \operatorname{cotg}\left[45^\circ + \frac{x}{2}\right],$$

de donde

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\Delta - z)\frac{1 + \operatorname{cotg}\frac{Z}{2}\operatorname{tg}\frac{H}{2}}{1 - \operatorname{cotg}\frac{Z}{2}\operatorname{tg}\frac{H}{2}} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\Delta - z)\operatorname{tg}\left[45^\circ + \frac{x}{2}\right], \qquad (2)$$

siendo

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{cotg}\frac{Z}{2}\operatorname{tg}\frac{H}{2}. \qquad (1)$$

Tomando en (1) y (2) mercatoriales, resulta :

$$\operatorname{co}\lambda(x) = \operatorname{co}\lambda(H) - \operatorname{co}\lambda(Z); \qquad \operatorname{co}\lambda(c) = \lambda(l) = \operatorname{co}\lambda(\Delta - z) - \lambda(x).$$

Estas fórmulas suponen implícitamente que $\Delta > z$ y, por tanto, $Z > H$; si ocurriera lo contrario, bastaría permutar $\Delta$ por $z$ y $Z$ por $H$ para obtener las fórmulas correspondientes al nuevo caso, las que por otra parte, se deducen con igual marcha de la analogía

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(z - \Delta)} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(H + Z)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(H - Z)}$$

y obtendríamos en mercatoriales

$$\operatorname{co}\lambda(c) = \lambda(l) = \operatorname{co}\lambda(Z - \Delta) - \lambda(y); \qquad (b)$$

$$\operatorname{co}\lambda(y) = \operatorname{co}\lambda(Z) - \operatorname{co}\lambda(H). \qquad (a)$$

Estas fórmulas permiten calcular más rápidamente la latitud que las empleadas generalmente.

**77.** Ofrecemos algunos ejemplos :

1° Calcular la latitud con los datos $\Delta = 61°54'35''$

$$z = 54°46'23'', \qquad P = H = 66°30'44''.$$

Empezaremos calculando el *azimut* por la fórmula de los *senos* (en realidad no puede emplearse otra valiéndose de los datos de la cuestión) :

$$\text{sen } Z = \frac{\text{sen } P \text{ sen } \Delta}{\text{sen } Z}$$

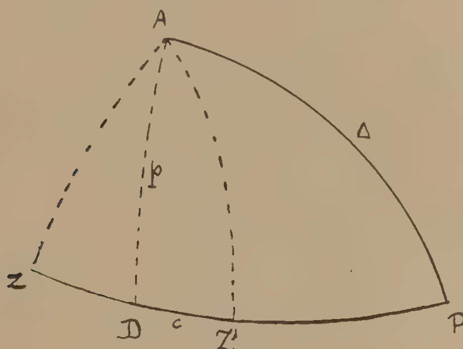



Figura 14

$$\begin{aligned} \log \text{sen } P &= 9{,}9624344 \\ &\phantom{=9{,}96243}27 \\ \log \text{sen } \Delta &= 9{,}9455648 \\ &\phantom{=9{,}96243}57 \\ \text{colog sen } z &= 0{,}0878450 \\ \log \text{sen } Z &= 9{,}9958526 \end{aligned}$$

$$\log \text{sen } Z = \log \text{sen } P + \log \text{sen } \Delta + \text{colog sen } z$$

$$\begin{aligned} Z \text{ tab.} &= \phantom{0}82° \phantom{0}5'39'' \\ &\phantom{=} 180 \\ Z' \text{ (supl.)} &= \phantom{0}97°54'21'' \end{aligned}$$

Por ser $\Delta > z$, debe ser $Z > P$, y como los valores tabular y suplementario obtenidos para Z, son ambos mayores que P, hay dos soluciones para el problema.

Calculémoslas por mercatoriales.

Las fórmulas son :

$$co\lambda(x) = co\lambda(H) - co\lambda(Z), \qquad \lambda(l) = co\lambda(\Delta - z) - \lambda(x),$$

$$\begin{array}{rr}
co\lambda(H) = & 1450,50 \\
co\lambda(Z) = & 475,86 \; - \\
\hline
co\lambda(x) = & 974,64 \\
 & 81 \\
\hline
 & 17
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
\lambda(x)\ \text{ap.} = & 6738,49 \\
 & 60 \\
 & 6739,09
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
\lambda(x) = & 6739,09 \; - \\
co\lambda(\Delta - z) = & 9539,18 \\
\lambda(l) & 2800,09 \\
 & 2799,01 \\
\hline
 & 18
\end{array}$$

$$l = 42°13'38''$$

$$\begin{array}{rr}
\Delta = & 61°54'35'' \\
z = & 54\ \ 46\ \ 23 \\
\hline
\Delta - z = & 7°08'12''
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
co\lambda(H) = & 1450,50 \\
co\lambda(Z') = - & 475,86 \; + \\
\hline
co\lambda(x') = & 1926,36 \\
\lambda(x')\ \text{ap.} = & 59 \\
 & 23
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
 & 4461,91 \\
 & 0,40 \\
\lambda(x') & 4462,31
\end{array}$$

$$\lambda(x') = 4462{,}31$$
$$\text{co}\lambda(\Delta - z) = \underline{9939{,}18}$$
$$\lambda(l') = 5076{,}87$$
$$6{,}67$$
$$20$$

$$l' \text{ ap.} = 66°20'45''$$
$$l' = 64\ \ 16\ 20$$

Si el observador tiene un conocimiento aproximado de su latitud podrá elegir entre ambas.

**78.** Estos resultados pueden verificarse de varias maneras :

1° Por la fórmula de las cotangentes :

$$\text{cotg}\,\Delta\,\text{sen}\,c = \cos c \cos \text{P} + \text{sen}\,\text{P}\,\text{cotg}\,\text{Z}$$

o

$$\text{cotg}\,\Delta\cos l = \text{sen}\,l\cos\text{P} + \text{sen}\,\text{P}\,\text{cotg}\,\text{Z}.$$

Con tablas de cinco decimales dió :

$$l = 42°13'30''.$$

2° Por la fórmula de los cosenos :

$$\cos z = \cos\Delta\,\text{sen}\,l + \text{sen}\,\Delta\cos l\cos\text{P}$$

con las mismas tablas :

$$l = 42°13'30''.$$

3° Por la segunda analogía de Neper :

$$\text{tg}\,\frac{c}{2} = \text{tg}\,\frac{1}{2}(\Delta - z)\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(\text{Z}+\text{H})}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(\text{Z}-\text{H})};$$

y con tabla de siete decimales

$$l = 42°13'38''.$$

**79.** Verifiquemos ahora el segundo resultado.

1° Partamos de la fórmula :

$$\text{cotg}\,\Delta\cos l' - \text{sen}\,l'\cos\text{P} + \text{sen}\,\text{P}\,\text{cotg}\,\text{Z}'.$$

De la que salen las dos expresiones :

$$\frac{\cot g \Delta}{\cos P} = \cot g\, x, \qquad (1)$$

$$\cos (c + l') = \text{sen}\, x \cot g\, Z' \, \text{tg}\, P, \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} \log \cot g \Delta &= 9{,}72732 \\ \log \sec P &= 0{,}39951 \\ \hline \log \cot g\, x &= 0{,}12683 \\ x &= 36°45' \\ l_m &= 64°16'20'' \\ l \cot g &= 64\ 16\ 21 \\ \hline \text{Dif.} &= \qquad 1'' \\ \log \text{sen}\, x &= 9{,}77694 \\ \log \cot g Z' &= 9{,}14227\ (n) \\ \log \text{tg}\, P &= 0{,}36194 \\ \hline \log \cos (x + l') &= 9{,}28148 \\ \text{arco tab.}\ (x + l') &= 78°58'39'' \\ x + l' &= 180 - 78°58'39'' \\ x + l' &= 101\ 01\ 21 \\ x &= 36\ 45 \\ \hline l' &= 64°46'21'' \end{aligned}$$

**80**. *Segundo ejemplo :* Datos :

$$\Delta = 51°18'34'', \qquad Z = 74°19'10'', \qquad H = 96°32'33''.$$

Aquí es $Z > \Delta$ y corresponden las fórmulas :

$$\text{co}\lambda\,(x) = \text{co}\lambda\,(Z) - \text{co}\lambda\,(H), \qquad \lambda\,(l) = \text{co}\lambda\,(Z - \Delta) - \lambda\,(x).$$

Como es $Z > \Delta$ debe ser $P > Z$; luego según que Z y Z' sean ambos menores que P, o uno menor y el otro mayor, habrá *dos* o *una* soluciones.

1° Empezamos calculando el *azimut* por la fórmula de *senos.*

$$\begin{aligned} \log \text{sen}\, P &= 9{,}9971626 \\ \log \text{sen}\, \Delta &= 9{,}8923915 \\ \text{colog sen}\, z &= 0{,}0164714 \\ \hline \log \text{sen}\, Z\ & 9{,}9060255 \\ & \qquad 177 \\ & \qquad 78 \end{aligned}$$

$$Z = 53°39'05''$$
$$180$$
$$Z' = 126°20'55''$$

En este ejemplo Z es menor que P, mientras que Z' es mayor, luego no hay más que una solución : *por mercatoriales*

$$\text{co}\lambda\,(Z) = 2343{,}90$$
$$\text{co}\lambda\,(H) = -\ 393{,}40 +$$
$$\text{co}\lambda\,(x) = 2737{,}30$$

Se encuentra 50

Dif. 20

$$\lambda\,(x)\ \text{ap.}\ \ 3341{,}11$$

Corrección 23

$$\lambda\,(x) = 3341{,}34$$

$$\lambda\,(x) = 3341{,}34 -$$
$$\text{co}\lambda\,(Z - \Delta) = 5473{,}47$$
$$\lambda\,(l) = 2131{,}13$$
$$\lambda\,(l)\ \text{ap.} = 91$$

$l$ aprox. 33°26'15''
$l$ exacta 33 26 26 .

**81.** Contrastamos el procedimiento con fórmulas conocidas.
1° Por

$$\text{cotg}\,\Delta \cos l = \text{sen}\, l \cos P + \text{sen}\, P\, \text{cotg}\, Z$$

que da las ecuaciones

$$\frac{\text{cotg}\,\Delta}{\cos P} = \text{cotg}\, x; \qquad (1)$$

$$\cos(x + l) = \text{cotg}\,\Delta\ \text{sen}\, x\ \text{tg}\, P. \qquad (2)$$

$$\log \text{cotg}\,\Delta = \bar{1}{,}903568$$
$$\text{colog} \cos P = 0{,}943323\ (n)$$
$$\log \text{cotg}\, x = 0{,}846891$$
$$7637$$
$$746$$

$$
\begin{array}{rr}
x \text{ tab.} = & 8^\circ \ 5'49'' \\
 & 180 \\
\hline
x = & 171^\circ 54' 11'' \\
l_m = & 33 \ 26 \ 26 \\
l_n = & 33 \ 26 \ 29 \\
\hline
\text{Dif.} & 3''
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\log \operatorname{cotg} Z = & \bar{1},866807 \\
\log \operatorname{sen} x = & \bar{1},148756 \\
\hline
\log \operatorname{tg} P = & 0,940486 \ (n) \\
\log \cos (x + l) = & \bar{1},955049 \\
 & 99 \\
\hline
 & 40
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
(x + l) \text{ tab.} = & 25^\circ 20' 40'' \\
 & 180 \\
\hline
x + l = & 205^\circ 20' 40'' \\
x = & 171 \ 54 \ 11 \\
\hline
l = & 33^\circ 26' 29''
\end{array}
$$

2° Con la fórmula

$$\cos z = \operatorname{sen} l \cos \Delta + \cos l \operatorname{sen} \Delta \cos P$$

de la que se deducen las expresiones :

$$\operatorname{tg} \Delta \cos P = \operatorname{tg} x; \qquad (1)$$

$$\operatorname{sen} (l + x) = \frac{\cos z \cos x}{\cos \Delta}, \qquad (2)$$

resulta

$$l = 33^\circ 26' 15''.$$

3° Un método más sencillo surge de lo sentado en nuestra *Tercera disquisición trigonométrica*, publicada en los *Anales* de la Sociedad Científica Argentina, tomo XCIV, página 97 y siguientes, 1922.

Haremos aquí el cálculo : En el triángulo de posición, los ángulos P (obtuso) y Z (agudo), son de distinta especie; luego el perpendículo bajado desde A cae en la prolongación de la base. Se originan así dos triángulos esféricos rectángulos, el ZAD y el PAD; en el primero se conocen la distancia zenital $z$, y el azimut calculado Z, luego podre-

mos hallar el primer segmento $s_1 = ZD$; en el segundo se conoce el ángulo APD, como suplemento del horario dado $P = H$ y además la distancia polar $\Delta$, luego se podrá calcular el segmento $s_2 = PD$. La diferencia $s_1 - s_2 = ZP = c$, dará la *colatitud*

$$\Delta AZD, \qquad \operatorname{tg} ZD = \operatorname{tg} z \cos Z = \operatorname{tg} s_1,$$

$$\Delta APD, \qquad \operatorname{tg} PD = \operatorname{tg} \Delta \cos (180^\circ - P) = \operatorname{tg} s_2,$$

$$c = s_1 - s_2, \qquad 90^\circ - l = s_1 - s_2, \qquad l = 90^\circ - (s_1 - s_2).$$

$$\log \operatorname{tg} z = 0{,}55172$$
$$\log \cos Z = 9{,}77284$$
$$\log \operatorname{tg} s_1 = 0{,}32456$$
$$44$$
$$12$$
$$s_1 = 64^\circ 39' 22''$$

$$\log \operatorname{tg} \Delta = 0{,}09643$$
$$\log \cos (180^\circ - P) = 9{,}05667$$
$$\log \operatorname{tg} s_2 = 9{,}15310$$
$$236$$
$$74$$
$$s_2 = 8^\circ 5' 49''$$

$$s_1 = 64^\circ 39' 22''$$
$$s_2 = 8 \quad 5 \; 49$$
$$c = 56^\circ 33' 33''$$
$$90$$
$$l = 33^\circ 26' 27''$$

**82.** Puede ocurrir todavía el caso de que el observador no conozca el hemisferio N o S en que se encuentre, como podría acaecer si el observador estuviera navegando en las proximidades del ecuador. En esta circunstancia debe referirse el triángulo al polo de la especie de la declinación y calcularse la *colatitud* por mercatoriales o por las fórmulas de Neper, previa determinación del azimut.

1° Debemos calcular el *azimut* por la fórmula de los senos, suponiendo que P es dado e igual a $9^\circ 43' 40''$, pues para la determinación más exacta de la latitud conviene que el astro esté próximo al meridiano antes o después del paso.

No debe calcularse con las *alturas* llamadas *horarias*, porque entonces resulta muy errónea.

Tenemos :

$$\text{sen } Z = \frac{\text{sen } P \text{ sen } \Delta}{\text{sen } z},$$

siendo

$P = 9°43'40''$, $a = 64°30'20''$, $z = 25°29'40''$, $d = -22°12'10''$,

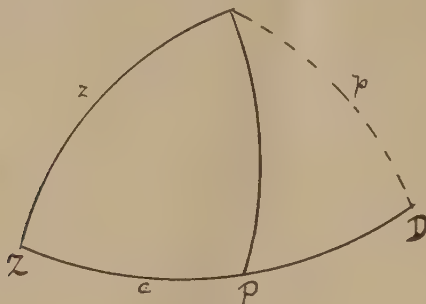



Figura 15

lo que nos dice que el astro está en el hemisferio sur; por referirse el triángulo al polo del mismo nombre que la declinación, la distancia polar será

$$90° - d = 67°47'50''$$

$$\Delta = 67°47'50''$$
$$z = 25\ \ 29\ 40$$
$$\Delta - z = 42°18'10''$$

$$\log \text{sen } Z = \log \text{sen } P + \log \text{sen } \Delta + \text{colog sen } z,$$

$$\log \text{sen } P = \bar{1},227803$$
$$\log \text{sen } \Delta = \bar{1},966542$$
$$\text{colog sen } z = 0,366104$$
$$\log \text{sen } Z = \bar{1},560449$$
$$207$$
$$242$$

$$Z = 21°18'45''$$

Debemos tomar también el suplemento de Z, $Z' = 158°41'15''$, porque el caso en que estamos es de ambigüedad, si bien veremos que

las circunstancias en que se encuentra el observador pueden resolverlo siempre, o casi siempre.

Las fórmulas mercatoriales a emplear son las del caso $\Delta > z$, y son ellas

$$\text{co}\lambda\,(x) = \text{co}\lambda\,(\text{H}) - \text{co}\lambda\,(\text{Z}), \qquad \text{co}\lambda\,(c) = \text{co}\lambda\,(\Delta - z) - \lambda\,(x),$$

$$\begin{aligned} \text{co}\lambda\,(\text{H}) &= 8470{,}54 \\ \text{co}\lambda\,(\text{Z}) &= 5742{,}61 \\ \hline \text{co}\lambda\,(x) &= 2727{,}93 \end{aligned}$$

$$l = -1°27'30''$$

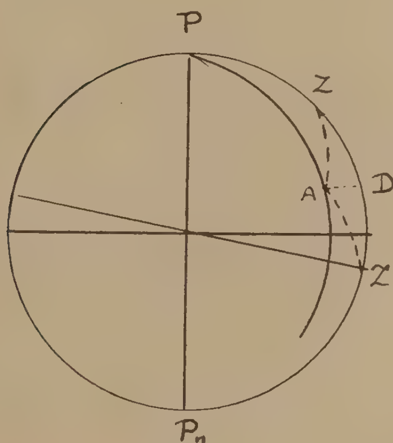



Figura 16

$$\begin{aligned} \lambda\,(x) &= \quad 3351{,}98 \\ \text{co}\lambda\,(\Delta - z) &= \quad 3264{,}46 \\ \hline \text{co}\lambda\,(c) &= - \quad 87{,}52 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c\ \text{tab.} &= \quad 88°32'30'' \\ & \quad 180 \\ \hline c &= \quad 91°27'30'' \end{aligned}$$

Esta solución dice que el observador está en el hemisferio norte. El triángulo se refirió al poló sur.

2° Veamos la otra solución :

Como Z es mayor que P y Z′ también lo es, hay trigonométricamente *dos* soluciones.

$$
\begin{aligned}
\text{co}\lambda\,(H) &= \quad 8470{,}54 \\
\text{co}\lambda\,[Z] &= -\ 5742{,}61\ + \\
\text{co}\lambda\,(y) &= \quad 14213{,}15 \\
\lambda\,(y) &= \quad 110{,}02\ - \\
\text{co}\lambda\,(\Delta - z) &= 3264{,}46 \\
\text{co}\lambda\,(c) &= 3154{,}44 \\
& \qquad\qquad 57 \\
& \qquad\qquad 13 \\
c &= 45°33'\ 5'' \\
l &= 46\ \ 26\ 55\ \ \text{S}
\end{aligned}
$$

Esta solución sitúa al observador en el hemisferio sur a gran distancia del ecuador. Debe eligirse la primera solución.

**83.** Comprobemos, si es posible, con fórmulas usuales la solución válida.

1° Un procedimiento que abrevia y simplifica el cálculo nos ofrece la descomposición del triángulo oblicuángulo en dos esféricos rectángulos.

Bajando el perpendículo desde A, extremo del lado Δ, en cuyo otro extremo hay el ángulo conocido P, el pie D del perpendículo debe caer en D, sobre $c$ y entre P y Z por ser los dos ángulos P y Z de la misma especie (aquí agudos). Luego bastará calcular los segmentos PD $= s_2$ para obtener por suma de ellos PD $= c$, o sea la incógnita principal.

Tenemos en el ΔPAD :

$$\text{tg PD} = \text{tg PA} \cos P; \qquad \text{tg}\, s_1 = \text{tg}\, \Delta \cos H°, \qquad (1)$$

y en el ΔZAD :

$$\text{tg ZD} = \text{tg AZ} \cos Z; \qquad \text{tg}\, s_2 = \text{tg}\, z \cos Z, \qquad (2)$$

$$
\begin{aligned}
\log \text{tg}\, \Delta &= 0{,}389301 \\
\log \cos H &= \bar{1}{,}993717 \\
\log \text{tg}\, s_1 &= 0{,}383018 \\
& \qquad\quad 2776 \\
& \qquad\quad\ 242 \\
s_1 &= 67°30'41''
\end{aligned}
$$

$$\log \operatorname{tg} z = \bar{1},678388$$
$$\log \cos Z = \bar{1},969235$$
$$\log \operatorname{tg} s_2 = \bar{1},647623$$
$$562$$
$$61$$

$$s_2 = 23°57'10''$$

$$s_1 + s_2 = c = 91°27'51'', \qquad l = 1°27'51'' \text{ N.}$$

2° Cuanto a la otra solución, es fácil ver que, siendo el ángulo $AZ'D = AZD$, será $AZ'P$ suplemento del ángulo Z y $PZ < 90°$, la *colatitud* dada por el segundo triángulo $APZ'$, o bien $c - 2s_2 = c'$

$$c' = 43°33'31'', \qquad l' = 46°26'29''.$$

3° La fórmula

$$\operatorname{cotg} \Delta \operatorname{sen} c = \cos c \cos P + \operatorname{sen} P \operatorname{cotg} Z,$$

nos ofrece otro modo de contrastar el resultado mercatorial.

La hemos dispuesto de esta suerte sucesivamente

$$\operatorname{sen} P \operatorname{cotg} Z = \operatorname{cotg} \Delta \operatorname{sen} c - \cos c \cos P.$$

Se sacó como factor común cos P, y se hizo

$$\frac{\operatorname{cotg} \Delta}{\cos P} = \operatorname{cotg} x, \tag{1}$$

resultando

$$\operatorname{sen} P \operatorname{cotg} Z = \cos P [\operatorname{cotg} x \operatorname{sen} c - \cos c] =$$
$$= \cos P \left[\frac{\operatorname{sen} c \cos x - \cos c \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}\right],$$

$$\operatorname{cotg} Z = \operatorname{cotg} P \frac{\operatorname{sen}(c - x)}{\operatorname{sen} x},$$

y por fin

$$\operatorname{sen}(c - x) = \operatorname{sen} x \operatorname{cotg} Z \operatorname{tg} P, \tag{2}$$

$$\log \operatorname{cotg} \Delta = 9,61082$$
$$\log \sec P = 0,00630$$
$$\log \operatorname{cotg} x = 9,61712$$
$$22$$
$$10$$

$$x = 67°30'17''$$

$$\log \operatorname{cotg} Z = 0,40878$$
$$\log \operatorname{tg} P = 9,23410$$
$$\log \operatorname{sen} x = 9,96564$$
$$\log \operatorname{sen} (c - x) = 9,60852$$
$$46$$
$$6$$

$$c - x = 23°57'10''$$
$$x = 67\ 30\ 17$$
$$c = 91°27'27''$$

valor que sólo difiere en 3″ del hallado mercatorialmente.

4° Otra verificación suministra la fórmula

$$\cos z = \cos c \cos \Delta + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \Delta \cos P,$$

que se transforma en

$$\cos z = \cos \Delta \left[\cos c + \frac{\operatorname{sen} \Delta}{\cos \Delta} \cos P \operatorname{sen} c\right],$$

y poniendo

$$\operatorname{tg} \Delta \cos P = \operatorname{tg} y,$$

viene :

$$\cos z = \frac{\cos \Delta}{\cos y}\left[\cos c + \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} \operatorname{sen} c\right] = \frac{\cos \Delta}{\cos y} \cos (c - y)$$

$$\cos (c - y) = \frac{\cos z \cos y}{\cos \Delta}, \qquad (2)$$

$$\log \operatorname{tg} \Delta = 0,389181$$
$$\log \cos P = \bar{1},993710$$
$$0,382891$$
$$776$$
$$115$$

$$y = 67°30'19''$$

$$\log \cos z = \bar{1},955508$$
$$\log \cos y = \bar{1},582744$$
$$\operatorname{colog} \cos \Delta = 0,422639$$
$$\log \cos (c - y) = \bar{1},960891$$
$$9$$
$$8$$

$$
\begin{aligned}
c - y &= 23°57'\ 9'' \\
y &= 67\ \ 30\ 19 \\
c &= 91°27'28''
\end{aligned}
$$

Este valor sólo difiere en 2″ del número mercatorial.

5° Pero si se opera con la fórmula

$$\text{cotg}\, z \,\text{sen}\, c = \cos c \cos Z + \text{sen}\, Z \,\text{cotg}\, P,$$

que da origen a las expresiones

$$\frac{\text{cotg}\, z}{\cos Z} = \text{cotg}\, x, \qquad (1)$$

$$\text{sen}\,(c - x) = \text{cotg}\, P \,\text{sen}\, x \,\text{tg}\, Z, \qquad (2)$$

se obtiene el resultado satisfactorio que muestra este cálculo, y en que el pequeño error es por exceso.

$$
\begin{aligned}
\log \text{cotg}\, z &= 0{,}321612 \\
\text{colog} \cos Z &= 0{,}030765 \\
\log \text{cotg}\, x &= 0{,}352377 \\
& \phantom{= 0{,}352}438 \\
& \phantom{= 0{,}3523}61
\end{aligned}
$$

$$x = 23°57'11''$$

$$
\begin{aligned}
\log \text{cotg}\, P &= 0{,}765908 \\
\log \text{sen}\, x &= \bar{1}{,}608511 \\
\log \text{tg}\, Z &= \bar{1}{,}591115 \\
\log \text{sen}\,(c - x) &= \bar{1}{,}965534 \\
& \phantom{= \bar{1}{,}9655}15 \\
& \phantom{= \bar{1}{,}9655}19
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c - x &= 67°30'22'' \\
x &= 23\ \ 57\ 11 \\
c &= 91°27'33''
\end{aligned}
$$

*a)* Quedan, pues, comprobadas por fórmulas de exactitud consagrada todas las aplicaciones hechas hasta ahora de estos *nuevos logaritmos,* que hemos llamado *mercatoriales,* a la resolución de los problemas más importantes a que da origen el *triángulo de posición.*

**84.** *En las aplicaciones que siguen* (para completar la teoría) *los mercatoriales no simplifican el cálculo,* pero ofrecen la ventaja de que las incógnitas vengan dadas por logaritmos tangentes; y así mismo, los datos se combinan de tal modo, que vienen expresados por la misma clase de funciones.

**85.** *Determinar la hora y la altura que tendrá un astro al cruzar el vertical primario.*

Cuando se trata de deducir la hora local mediante una observación de altura se requiere, para que la incógnita resulte bien determinada, que el astro se encuentre en una de dos circunstancias favorables; a saber : que en esté el instante de cortar el vertical oriental u occidental, o bien que se halle primario en el momento en que es *recto su ángulo paraláctico* o de *posición.* Como veremos, uua de estas condiciones excluye la otra; pero es posible que una de ellas se realice sila latitud y declinación son ambas de la misma especie, es decir, ambas norte o ambas sur.

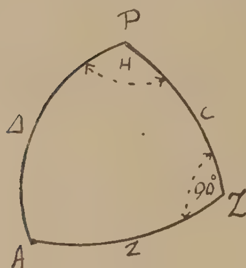


Figura 17

**86.** 1° Si buscamos la verificación de esa primera circunstancia debemos observar que en ella el *azimut* vale 90°, y el triángulo de posición es en tal virtud, esférico rectángulo en Z. En ese caso, la *distancia zenital,* la *colatitud* y la *distancia polar* están ligadas por la relación

$$\cos \Delta = \cos c \cos z$$

$\therefore$

$$\cos z = \frac{\cos \Delta}{\cos c}; \qquad \operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} d}{\operatorname{sen} l}. \tag{1}$$

Como sen $a$ es inferior (generalmente) a la unidad, debe ser sen $l >$ sen $d$ o bien $l > d$ y de la misma especie.

La fórmula (1) permite calcular la *altura* del astro, conociéndose $d$ y $l$.

2° El *horario,* del cual podemos deducir la *hora,* se liga a $c$ y $\Delta$ por la relación :

$$\operatorname{tg} \Delta \cos H = \operatorname{tg} c; \qquad \cos H = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} \Delta} = \frac{\operatorname{cotg} l}{\operatorname{cotg} d} = \frac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{tg} l}, \tag{2}$$

debiendo ser $l > d$, como antes, pues H ha de ser menor que seis horas. Estas fórmulas (1) y (2) resuelven muy fácilmente el problema.

**87.** Para su resolución en mercatoriales, partiremos de estas fórmulas :

1° *Solución para la altura :* Partamos de $\cos z = \frac{\cos \Delta}{\cos c}$ y operemos como se indica sucesivamente :

$$\frac{1 - \cos z}{1 + \cos z} = \frac{1 - \frac{\cos \Delta}{\cos c}}{1 + \frac{\cos \Delta}{\cos c}} = \frac{\cos c - \cos \Delta}{\cos c + \cos \Delta} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\Delta + c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\Delta - c)}{2 \cos \frac{1}{2}(\Delta + c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\Delta - c)}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{Z}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\Delta + c) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\Delta - c), \qquad (1')$$

de cuya fórmula podríamos tomar mercatoriales y resolver el problema de la altura. Pero conviene más obtener ésta en función de los elementos de la observación.

Si tomamos mercatoriales en (1′) obtendremos la solución más rápidamente que transformando la fórmula $\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} d}{\operatorname{sen} l}$.

$$2 \operatorname{co}\lambda (z) = \operatorname{co}\lambda (\Delta + c) + \operatorname{co}\lambda (\Delta - c) =$$

$$= \operatorname{co}\lambda [90° - d] + 90° - l] + \operatorname{co}\lambda [90° - d - 90° + l]$$

$$= \operatorname{co}\lambda [180° - (d + l)] + \operatorname{co}\lambda [l - d] = \operatorname{co}\lambda (l - d) - \operatorname{co}\lambda [l + d]$$

$$\operatorname{co}\lambda (z) = \operatorname{co}\lambda (90° - a) = \lambda (a) = \frac{1}{2} [\operatorname{co}\lambda (l - d) - \operatorname{co}\lambda (l + d)]. \qquad (a)$$

2° *Solución para el horario :* No conviene partir para obtenerla de la fórmula (2) $\cos H = \frac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{tg} l}$, porque las expresiones resultantes serían algo complicadas y embarazosas. Como el triángulo da también

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} H$$

$\therefore$

$$\operatorname{sen} H = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} \Delta}, \qquad (3)$$

partiremos de éstas que escribiremos :

$$\cos(90° - \mathrm{H}) = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} \Delta}, \qquad (3')$$

$$\frac{1 - \cos(90° - \mathrm{H})}{1 + \cos(90° - \mathrm{H})} = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(90° - \mathrm{H}) = \frac{\operatorname{sen}\Delta - \operatorname{sen} z}{\operatorname{sen}\Delta + \operatorname{sen} z} =$$

$$= \frac{2\cos\frac{1}{2}(\Delta + z)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\Delta - z)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\Delta + z)\cos\frac{1}{2}(\Delta - z)}$$

$$\operatorname{tg}^2\left[45° - \frac{\mathrm{H}}{2}\right] = \operatorname{cotg}^2\left[45° + \frac{\mathrm{H}}{2}\right] = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\Delta + z)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\Delta - z)\,\mathrm{N},$$

y tomando logaritmos resulta :

$$2\lambda(\mathrm{H}) = \mathrm{co}\lambda(\Delta - z) - \mathrm{co}\lambda(\Delta + z).$$

En función de $d$ y $a$ será :

$$2\lambda(\mathrm{H}) = \mathrm{co}\lambda[90° - d - 90° + a] - \mathrm{co}\lambda[90° - d + 90° - a]$$

$$= \mathrm{co}\lambda[a - d] - \mathrm{co}\lambda[180° - (a + d)] = \mathrm{co}\lambda(a - d) + \mathrm{co}\lambda(a + d)$$

$$\lambda(\mathrm{H}) = \frac{1}{2}[\mathrm{co}\lambda(a - d) + \mathrm{co}\lambda(a + d)]. \qquad (b)$$

Las $(a)$ y $(q)$ resuelven el problema en mercatoriales.

**88.** *Ejemplo.* — En latitud 36°30′5″ y para una declinación de — 9°58′54″ se pide la hora y altura verdadera del Sol al cruzar el vertical primario oriental.

1° *Altura :*

$$\begin{aligned} l &= 36°30'00'' \\ d &= \phantom{0}9\ \ 58\ 53 \\ \hline l + d &= 46°28'54'' \\ l - d &= 26\ \ 31\ 06 \\ \mathrm{co}\lambda(l - d) &= 4969{,}13 \\ \mathrm{co}\lambda(l + d) &= 2905{,}80 \\ \hline 2\lambda(a) &= 2063{,}33 \\ & \phantom{=} 1034{,}66 \\ & \phantom{=} 64 \\ & \phantom{=} 2 \\ a &= 16°56'31'' \end{aligned}$$

2° *Horario :*

$$a = 16°56'31''$$
$$d = 9\ 58\ 54$$
$$a - d = 6°57'37''$$
$$a + d = 26\ 55\ 25$$

$$\text{co}\lambda\,(a - d) = 9625{,}43$$
$$\text{co}\lambda\,(a + d) = 4915{,}04$$
$$2\lambda\,(H) = 14540{,}47$$
$$\lambda\,(H) = 7270{,}23$$
$$69{,}47$$
$$0{,}76$$

$$H = 76°24'26''$$
$$H^{\circ} = 5^{h}4^{m}57^{s}25$$

| | |
|---|---|
| El horario es de | $5^{h}\ 4^{m}57^{s}3$ |
| y como es oriental debe restarse | 24 |
| | $18^{h}55^{m}02^{s}8$ |

de $24^{h}$ para tener la hora astronómica de tiempo verdadero.

**89.** Confrontemos con las fórmulas usuales :

$$\text{sen}\ a = \frac{\text{sen}\ d}{\text{sen}\ l} = \text{sen}\ d \sec l; \qquad \cos H = \frac{\text{tg}\ d}{\text{tg}\ l} = \text{tg}\ d\ \text{cotg}\ l$$

$$\log \text{sen}\ d = 9{,}23823$$
$$65$$
$$\log \text{cosec}\ l = 0{,}22561$$
$$\log \text{sen}\ a = 9{,}46449$$
$$28$$
$$21$$

$$a = 16°56'30''5$$

$$\log \text{tg}\ d = 9{,}24484$$
$$67$$
$$\log \text{cotg}\ l = 0{,}13079$$
$$\log \cos H^{\circ} = 9{,}37630$$
$$52$$
$$22$$

$$H^{\circ} = 5^{h}4^{m}57^{s}5$$

**90.** *Calcular la hora y altura de un astro al ser recto su ángulo de posición o paraláctico.*

Lo deduciremos del triángulo esférico rectángulo PAZ, en que $A = 90°$ es el *ángulo paraláctico*. En ese triángulo figura la relación que liga los elementos $c$, $\Delta$ y $z$, es :

$$\cos c = \cos \Delta \cos z$$

$\therefore$

$$\cos z = \frac{\cos c}{\cos \Delta},$$

o bien, 1°

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} l}{\operatorname{sen} d}. \tag{1}$$

Como $l$ y $d$ son elementos agudos, pues ambos deben ser de la misma especie, y el astro está sobre el horizonte del observador, ha de ser $\operatorname{sen} d > \operatorname{sen} l$, y por tanto, $d > l$, condición opuesta a la del problema anterior. De la (1) obtendremos, pues, la *altura*.

2° El *horario* podemos calcularlo por la fórmula

$$\operatorname{tg} c \cos P = \operatorname{tg} \Delta,$$

$$\cos P = \frac{\operatorname{tg} \Delta}{\operatorname{tg} c} = \frac{\operatorname{cotg} d}{\operatorname{cotg} l} = \frac{\operatorname{tg} l}{\operatorname{tg} d}, \tag{2}$$

y ese horario debe ser menor de seis horas, a causa de ser el cateto opuesto $z$ menor de 90°.

Con esas fórmulas (1) y (2) queda el problema resuelto empleando las tablas corrientes. Aun cuando la (1) viene expresada por *senos,* no hay ambigüedad, pues, que a $a$ le corresponde el valor agudo resultante del cálculo.

**91.** Tratemos ahora de resolver las dos cuestiones por mercatoriales.

1° Para la *altura,* escribiremos la (1) sucesivamente así :

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} l}{\operatorname{sen} d}; \qquad \cos (90° - a) = \frac{\operatorname{sen} l}{\operatorname{sen} d};$$

$$\frac{1 - \cos (90° - a)}{1 + \cos (90° + a)} = \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sen} l}{\operatorname{sen} d}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen} l}{\operatorname{sen} d}};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(90° - a) = \operatorname{tg}\left[45° - \frac{a}{2}\right] = \operatorname{cotg}^2\left[45° + \frac{a}{2}\right] = \frac{\operatorname{sen} d - \operatorname{sen} l}{\operatorname{sen} d + \operatorname{sen} l};$$

$$\operatorname{cotg}^2\left[45° + \frac{a}{2}\right] = \frac{2\cos\frac{1}{2}(d+l)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(d-l)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(d+l)\cos\frac{1}{2}(d-l)} =$$

$$= \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(d+l)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(d-l);$$

y tomando logaritmos será en definitiva

$$\lambda(a) = \frac{1}{2}[\operatorname{co}\lambda(d-l) - \operatorname{co}\lambda(d+l)]. \qquad (a)$$

2° Para el calculo del *horario,* saidremos de la fórmula

$$\operatorname{sen} H = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} c}, \qquad (3)$$

que transformada del mismo modo que su inversa del problema del cruce del primer vertical, viene a dar en mercatoriales la expresión

$$\lambda(H) = \frac{1}{2}[\operatorname{co}\lambda(a+l) + \operatorname{co}\lambda(a-l)]. \qquad (b)$$

**92.** *Ejemplo.* — En latitud de 12°15′ N y con declinación 22°58′18″ se pide la hora y altura verdaderas del Sol en el instante de ser recto el ángulo de posición por la *mañana.*

1° *Altura :*

$$d = 22°58'18'' +$$
$$l = 12\ \ 15\ 00\ \ N$$
$$d - l = 10°43'18''$$
$$d + l = 35\ \ 13\ 18$$
$$\operatorname{co}\lambda(d-l) = 8134{,}35$$
$$\operatorname{co}\lambda(d+l) = 3944{,}84$$
$$2\lambda(a) = 4189{,}51$$
$$\lambda(a) = 3094{,}95$$
$$a = 32°56'00''$$

*Horario :*

$$a = 32°56'$$
$$l = 12\ \ 15$$
$$a + l = 45°11'$$
$$a - l = 20\ \ 41$$

$$co\lambda = 3014,41$$
$$co\lambda = 5847,96$$
$$2\lambda(H) = 8862,37$$
$$\lambda(H) = 4431,18$$
$$04$$
$$14$$

$$H^{\circ} = 39^{\circ}11'19''$$

$$H_c = 3^h 56^m 45^s 25$$

2° El cálculo hecho con las fórmulas (1) y (2) dió :

$$a = 22^{\circ}56', \qquad H^{\circ} = 59^{\circ}11'23'',$$

y la (3) dió :

$$H = 59^{\circ}11'16''.$$

**93.** También hubiera podido deducirse el *horario* del astro en el momento del *corte* del *vertical primario* oriental u occidental por la fórmula

$$\cos H = \frac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{tg} l} \tag{2}$$

transformada para calcularla por mercatoriales.

1° Y del mismo modo se deduciría el momento de ser *recto* al *ángulo paraláctico,* por la expresión correlativa

$$\cos H = \frac{\operatorname{tg} l}{\operatorname{tg} d}. \tag{3}$$

Estas dos fórmulas, muy convenientes para el cálculo del horario, y por consiguiente, de la *hora* con las funciones usuales, no lo son tanto para el cálculo mercatorial, porque éste introduce alguna operación más que lo hace más largo.

*a)* He aquí la transformación para la (3) :

$$\frac{1 - \cos H}{1 + \cos H} = \frac{1 - \dfrac{\operatorname{tg} l}{\operatorname{tg} d}}{1 + \dfrac{\operatorname{tg} l}{\operatorname{tg} d}} = \frac{\operatorname{tg} d - \operatorname{tg} l}{\operatorname{tg} d + \operatorname{tg} l} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} d}{\cos d} - \dfrac{\operatorname{sen} l}{\cos l}}{\dfrac{\operatorname{sen} d}{\cos d} + \dfrac{\operatorname{sen} l}{\cos l}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} d \cos l - \cos d \operatorname{sen} l}{\operatorname{sen} d \cos l + \cos d \operatorname{sen} l} = \frac{1 - \operatorname{cotg} d \operatorname{tg} l}{1 + \operatorname{cotg} d \operatorname{tg} l};$$

y si se pone

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{cotg} d \operatorname{tg} l = \operatorname{cotg}\frac{2d}{2}\operatorname{tg}\frac{2l}{2} \qquad (1)$$

la precedente puede escribirse como sigue :

$$\frac{1-\cos H}{1+\cos H} = \operatorname{tg}^2\frac{H}{2} = \frac{1-\operatorname{cotg}\frac{2d}{2}\operatorname{tg}\frac{2l}{2}}{1+\operatorname{cotg}\frac{2d}{2}\operatorname{tg}\frac{2l}{2}} =$$

$$= \frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \operatorname{cotg}\left[45^\circ + \frac{x}{2}\right]. \qquad (2)$$

Tomando mercatoriales en (1) y (2) viene por fin :

$$\operatorname{co}\lambda(x) = \operatorname{co}\lambda(2l) - \operatorname{co}\lambda(2d) \qquad (c)$$

$$\operatorname{co}\lambda(H) = \frac{1}{2}[\lambda(x)]. \qquad (d)$$

*b) Ejemplo. — Hallar el horario para los datos precedentes :*

$$d = 22^\circ 58' 18'', \qquad l = 12^\circ 15' \text{ N.}$$

$$2d = 45^\circ 56' 36''$$
$$2l = 24 \quad 30 \quad 00$$

$$d(x) \text{ ap.} = 3889{,}37$$
$$pp\ 0{,}17 = \quad 24$$
$$\lambda(x) = 3889{,}61$$

$$\operatorname{co}\lambda(2d) = 2950{,}55$$
$$\operatorname{co}\lambda(2l) = 5250{,}47$$
$$\operatorname{co}\lambda(x) = 2299{,}92$$
$$300{,}09$$
$$0{,}17$$

$$\lambda(x) = 3889{,}61$$

$$\frac{1}{2}\lambda(x) = 1944{,}80 = \operatorname{co}\lambda(H)$$

90

$$\begin{aligned} H^\circ \text{ ap.} &= 59^\circ 11' 15'' \\ pp \text{ por } 0{,}10 &= \phantom{59^\circ 11'} 5 \\ \hline H^\circ &= 59^\circ 11' 20'' \end{aligned}$$

Este horario se restará de 360° para obtener el arco que convertido en tiempo dará la hora verdadera astronómica.

Si se desea la hora media hay que aplicarle la *ecuación de tiempo* para la hora simultánea del primer meridiano y con el signo que indiquen las *Efemérides.*

2° Las fórmulas que hubiéramos obtenido en la transformación de

$$\cos H = \frac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{tg} l} = \operatorname{tg} d \operatorname{cotg} l$$

hallada para el horario de un astro en el momento de cruzar el vertical primario oriental u occidental, hubieran diferido de las que acabamos de hallar en la diferencia de las colambdas, de modo que serían :

$$\mathrm{co}\lambda\,(x) = \mathrm{co}\lambda\,(2d) - \mathrm{co}\lambda\,(2l), \qquad \lambda\,(x) = 2\,\mathrm{co}\lambda\,(H),$$

$$\mathrm{co}\lambda\,(H) = \frac{1}{2}\,\lambda\,(x),$$

resultado fácil de prever.

*Determinar la hora del orto u ocaso verdadero de un astro.*

Los datos necesarios para la resolución de este problema son la latitud del observador y la declinación del astro en el instante de *nacer* o de *ponerse* respectivamente, en el cual la altura verdadera se anula.

La primera de las fórmulas fundamentales del triángulo de posición, nos ilustra en este caso, introduciendo en ella la hipótesis de $a = 0$

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} l \operatorname{sen} d + \cos l \cos d \cos H,$$

$$a = \operatorname{sen} l \operatorname{sen} d + \cos l \cos d \cos H,$$

$$\cos H = -\frac{\operatorname{sen} l \operatorname{sen} d}{\cos l \cos d} = -\operatorname{tg} l \operatorname{tg} d, \qquad (1)$$

expresión que nos dice que, cuando la *latitud* y la *declinación* son de idéntico signo, o de la *misma especie,* el horario del *orto* u *ocaso, es mayor de seis horas;* y cuando son de *contraria especie,* el horario es *menor de seis horas.* Con ese conocimiento puede pasarse a la hora astronómica o en la civil, que es como suelen darse las horas de los *ortos* y *ocasos.*

**95.** Para resolver el problema con mercatoriales, prescindiremos del signo, e igualaremos cos H a tg $x$, teniéndose

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} l \operatorname{tg} d \qquad (2)$$

y tomando logaritmos mercatoriales, viene

$$\text{co}\lambda\,(2x) = \text{co}\lambda\,(2l) + \text{co}\lambda\,(2d) \qquad (a)$$

pero de cos H = tg $x$, resulta :

$$\frac{1 - \cos H}{1 + \cos H} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \qquad \text{o} \qquad \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} H = \operatorname{cotg}\left[45° + \frac{2x}{2}\right]$$

y, por consiguiente,

$$2\ \text{co}\lambda\,(H) = \lambda\,(2x), \qquad \text{co}\lambda\,(H) = \frac{1}{2}\lambda\,(2x).$$

**96.** *Ejemplos.* — 1° Sea la *declinación* del Sol corregida para la hora aproximada cel *orto* + 23°5′47″ y la *latitud* 38°50′ N. Como $d$ y $l$ son de igual especie, el Sol saldrá *antes* de las *seis* de la mañana, y suponiendo que el orto tenga lugar a las $16^h 45^m$, con esta hora y la longitud conocida del observador reducida a tiempo, se buscará la hora que en ese instante se cuente en el meridiano de las efemérides astronómicas de que se haga uso; a esta hora suele llamarae *hora reducida*, y para ella se determinan los elementos que hagan falta para el cálculo que se desea ejecutar. Más exacto es hacer uso de un cronómetro arreglado por el meridiano de las *efemérides*, y asi puede obtenerse la hora de éste en cualquier momento. Si el observador es un navegante, deberá calcularse la *latitud*, también para la hora del primer meridiano correspondiente al instante físico de la observación

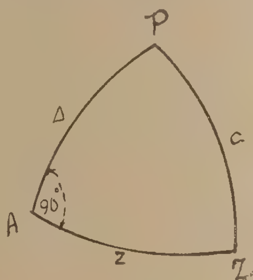



Figura 18

$d = 23°\ 5′47″$ N $\qquad 2d = 46°11′34″$

$l = 36\ 50$ . N $\qquad 2l = 77\ 40$

$$\text{co}\lambda\,(2d) = 2929{,}76$$
$$\text{co}\lambda\,(2l) = \ \ 745{,}78$$
$$\text{co}\lambda\,(2x) = 3675{,}54$$

76

22

$$2 \operatorname{co}\lambda(H) = \lambda(2x) = 2460{,}19$$

$$\operatorname{co}\lambda(H) = \frac{1}{2}\lambda(2x) = 1230{,}10$$

$$H^{\circ} \text{ tab.} = 69°55'20''$$

$$H^{\circ} \text{ orto} = 4^{h}39^{m}41^{s}3 \text{ civil}$$

12

$$H^{\circ} \text{ ap. ocaso} = 7^{h}20^{m}19^{s}$$

$$2H^{\circ} \text{ orto} = 9^{h}19^{m}22^{s} \text{ duración de la noche}$$

$$2H^{\circ} \text{ ocaso} = 14\ 40\ 36 \text{ duración del día}$$

Si se quieren las horas medias se aplica la ecuación de tiempo (de la fecha 10 de junio) corregida a igual a — 43 $^{s}$6.

**97**. *Ejemplo. — 2° En latitud 38°50′ N y con d = — 14°8′45″ se pide para el 30 de octubre la hora media del orto del Sol.*

$$l = 38°\ 50'\ N \qquad d = -14°08'45''$$

$$l = 77\ 40 \qquad 2d = 28\ 17\ 30$$

$$\operatorname{co}\lambda(2l) + \operatorname{co}\lambda(2d) = \operatorname{co}\lambda(2x)$$

$$\lambda(2x) = 2 \operatorname{co}\lambda(H)$$

$$\operatorname{co}\lambda(2l) = 745{,}78$$

$$\operatorname{co}\lambda(2d) = 4737{,}88$$

$$\operatorname{co}\lambda(2x) = 5483{,}66$$

$$\lambda(2x) = 1414{,}54$$

$$\frac{1}{2}\lambda(2x) = 707{,}27$$

44

17

$$\operatorname{co}\lambda(H) = 78°17'40''$$

$$H_{t} = 5^{h}13^{m}10^{s}7 \text{ duplo} = \text{duración de la noche}$$

12

$$H^{\circ} \text{ ap. del ocaso} = 6^{h}46^{m}49^{s}3 \text{ duplo} = \text{duración del día}$$

**98.** Cálculo con las fórmulas usuales

$$\cos(H) = -\operatorname{tg} l \operatorname{tg} d, \qquad \log\cos H = \log\operatorname{tg} l + \log\operatorname{tg} d$$

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tg} l &= 9{,}90578 \\ \log\operatorname{tg} d &= 9{,}40147 \\ \log\cos H &= 9{,}30725 \\ &\phantom{= 9{,}307}65 \\ &\phantom{= 9{,}307}40 \end{aligned}$$

$$H'' = 78°17'40''$$

$$H_t° = \ 5^h 13^m 11^s 65$$

Debe tomarse el suplemento del horario porque el Sol sale después de las seis de la mañana.

La ecuación de tiempo substractivo es de $-16^m 16^s 78$.

$$\begin{aligned} H_r \text{ orto} &= 6^h 46^m 40^s 3 \\ &\phantom{= 6^h} 16\ \ 16\ \ 78 \\ \hline H_m \text{ del orto} &= 6^h 30^m 32^s 52 \end{aligned}$$

**99.** Puede resolverse también con el auxilio de un triángulo esférico rectángulo, buscando la *diferencia ascensional* y sumándola o restándola a seis horas.

*Determinar el valor de la amplitud al orto o al ocaso de un astro.*

**100.** Llámase *amplitud* al orto o al ocaso de un astro al *complemento del azimut.*

Puede deducirse la *amplitud* de la fórmula fundamental en que entra el *azimut,* estableciendo en ella la circunstancia de ser $z = 90°$ o la altura $a = 0$.

En efecto, de

$$\operatorname{sen} d = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} l + \cos a \cos l \cos Z,$$

resulta para $a = 0$

$$\operatorname{sen} d = \cos l \cos Z$$

por ser

$$\operatorname{sen} a = 0, \qquad \cos a = 1,$$

y si ponemos

$$Z = 90^c - A_p$$

viene

$$\text{sen}\, d = \cos l \cos (90° - A_p) = \cos l \,\text{sen}\, A_p,$$

por tanto,

$$\text{sen}\, A_p = \frac{\text{sen}\, d}{\cos l} = \text{sen}\, d \sec l. \qquad (1)$$

Como $l$ es siempre positiva o absoluta y menor que 90° cos $l$ será positivo; luego el signo de la amplitud es el mismo de la declinación; y se cuenta desde el E o el O hacia el punto cardinal N e S según sen $d$.

Para el cálculo mercatorial escribiremos la (1) de este modo :

$$\cos (90° - A_p) = \frac{\cos (90° - d)}{\cos l} \qquad (2)$$

y seguiremos transformando como en problemas ya vistos :

$$\frac{1 - \cos [90° - A_p]}{1 + \cos [90° - A_p]} = \frac{1 - \dfrac{\cos (90° - d)}{\cos l}}{1 + \dfrac{\cos (90° - d)}{\cos l}} = \frac{\cos l - \cos (90° - d)}{\cos l + \cos (90° - d)}$$

$$\text{tg}^2 \left[45° - \frac{A_p}{2}\right] = \text{cotg}^2 \left[45° + \frac{A_p}{2}\right] =$$

$$= \frac{2 \,\text{sen}\, \frac{1}{2} [l + 90° - d] \,\text{sen}\, \frac{1}{2} [90° - d - l]}{2 \cos \frac{1}{2} [l + 90° - d] \cos \frac{1}{2} [l + d - 90°]}$$

$$\text{cotg}^2 \left[45° + \frac{A_p}{2}\right] = \text{tg}\, \frac{1}{2} [90° + l - d] \frac{\text{sen}\, \frac{1}{2} [90° - (d + l)]}{\cos \frac{1}{2} [90° - (d + l)]}$$

$$\text{cotg}^2 \left[45° + \frac{A_p}{2}\right] = \text{tg} \left[45° + \frac{l - d}{2}\right] \text{tg} \left[45° - \frac{d + l}{2}\right]$$

y en mercatoriales

$$- 2\lambda (A_p) = \lambda (l - d) - \lambda (l + d); \qquad 2\lambda [A_p] = \lambda (l + d) - \lambda (l - d);$$

$$\lambda [A_p] = \frac{1}{2} [\lambda (l + d) - \lambda (l - d)]. \qquad (a)$$

**101.** *Ejemplos.* — 1° *En latitud 38°30′ S, y longitud $3^h 28^m$ E de Greenwich, se pide la amplitud octiva para d = + 21°10′32″*

$$
\begin{aligned}
l &= 38°30'00'' \text{ S} \\
d &= 21\ 10\ 32\ \text{ N} \\
l + d &= 59°40'32'' \\
l - d &= 17\ 19\ 28
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda(l + d) &= 4488,63 \\
\lambda(l - d) &= 1055,68 \\
2\lambda(A_p) &= 3432,95 \\
\lambda(A_p) &= 1716,47 \\
&\quad\ \ 42 \\
&\quad\ \ 05
\end{aligned}
$$

$$A_p = 27°29'18''$$

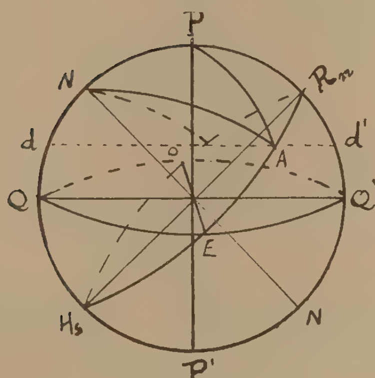



Figura 19

Del este al norte (véase fig. 20 para ambos ejemplos).

2° *Hallar la amplitud occidua de un astro cuya declinación es 23°30′30″ N, siendo la latitud de 17°25′15″ N.*

$$
\begin{aligned}
l &= \quad 17°25'15'' \\
d &= \quad 23\ \ 30\ 30 \\
l + d &= \quad 40°55'45'' \\
l - d &= -\ \ 6\ \ 05\ 15
\end{aligned}
$$

$$\lambda(l + d) = 2695,97$$
$$\lambda(l - d) = -\ 365,94 +$$
$$2\lambda(A_p) = 3061,91$$
$$\lambda(A_p) = 1530,95$$

$$A_p = O - 24°42'43\ N$$

**102.** Pueden comprobarse estos resultados con los que ofrecen las fórmulas corrientes (1) :

$$\text{sen}\ A_p = \frac{\text{sen}\ d}{\text{sen}\ l} = \text{sen}\ d\ \text{sec}\ l.$$

*Primer ejemplo :*

$$\log \text{sen}\ d = 9,55778$$
$$\log \text{sec}\ l = 0,10646$$
$$\log \text{sen}\ A_p = 9,66424$$

$$A_p = E - 27°29'20''\ N$$

*Segundo ejemplo :*

$$\log \text{sen}\ d = 9,60085$$
$$\log \text{sec}\ l = 0,02039$$
$$\log \text{sen}\ A_p = 9,62124$$
$$04$$
$$20$$

$$A_p = O - 24°42'44''\ N$$

**103.** Dijimos que el problema anterior puede resolverse buscando la *diferencia ascensional* y sumándola o restándola de seis horas según que el horario debe ser mayor o menor que 90°. Una construcción sencilla demuestra el aserto y además manifiesta como se ligan la *declinación,* la *latitud,* la *diferencia ascensional* (así llamada por los españoles) y la *amplitud.*

Sea en la figura 20 Z el zenit. NS el eje de la esfera celeste, EQ el ecuador, HR el horizonte racional, A un astro, NA un círculo de declinación y al propio tiempo su distancia polar, ZA su *distancia zenital* de 90°, pues la *altura* es nula. Prolongando NA hasta el ecuador, será DA la *declinación* del astro, NZ la *colatitud c,* arco que es igual a HE o QR medida del ángulo AOD; el azimut NZA está medido por el arco HA del horizonte y como AO es su complemento, será la *amplitud* contada del punto E u O hacia el astro cuya posición

depende de su declinación. El ángulo ZNA *horario*, está medido por el arco de ecuador QOD, que se compone de QO = 90° o seis horas y de OD que es la llamada *diferencia ascensional*. El horario del astro A en el horizonte excede a seis horas en lo que valga la *diferencia ascensional*. Para el astro A′ también en el horizonte, su horario estaría medido por el arco QD′ de ecuador, igual a QO (6 horas) menos OD′ (diferencia ascensional). Notemos que el astro en A tiene una declinación de la misma especie que la latitud del observador, mien-

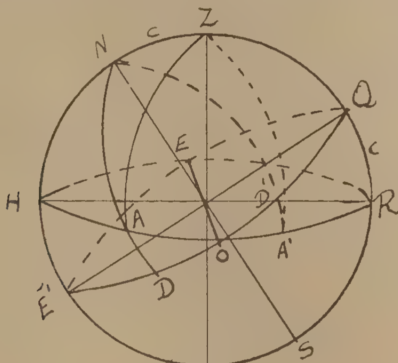



Figura 20

tras que el astro A′ tiene la declinación de opuesto signo que la latitud del observador en $Z_1$.

Si en el triángulo esférico rectángulo en D (o en D′), conociéramos la *declinación* DA (o D′A′) y la *colatitud* AOD es claro que podríamos calcular OD (u OD′) *diferencia* ascensional y OA (u OA′) *amplitud*.

Tendríamos, pues :

$$\text{tg AD} = \text{sen OD tg DOA},$$

$$\text{tg}\, d = \text{sen}\,(d\ \text{arc})\ \text{tg}\, c = \text{sen}\,(d\ \text{arc})\ \text{cotg}\, l,$$

de donde

$$\text{sen}\,(d\ \text{arc}) = \frac{\text{tg}\, d}{\text{cotg}\, l} = \text{tg}\, d\ \text{tg}\, l. \qquad (1)$$

Este elemento está contenido en las *Tablas de Mendoza*

$$\text{sen}\, d = \text{sen A}_p\ \text{sen}\, c, \qquad \text{sen A}_p = \frac{\text{sen}\, d}{\text{sen}\, a} = \frac{\text{sen}\, d}{\cos l} = \text{sen}\, d\ \text{sec}\, l. \qquad (2)$$

También la *amplitud* se ha tabulado en la misma obra, y se halla entrando en la tabla con los argumentos latitud y declinación al grado próximo, lo que para la práctica de la navegación es suficiente.

**104.** Si se quisiera obtener por mercatoriales el valor de la *diferencia ascensional,* que para abreviar designaremos con $\theta$, tendríamos :

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{cotg} l} \qquad (1)$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{cotg} l} \qquad (2)$$

$$\frac{1 - \cos(90^\circ - \theta)}{1 + \cos(90^\circ - \theta)} = \operatorname{tg}^2\left[45^\circ - \frac{\theta}{2}\right] = \frac{1 - \dfrac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{cotg} l}}{1 + \dfrac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{cotg} l}} = \frac{\operatorname{cotg} l - \operatorname{tg} d}{\operatorname{cotg} l + \operatorname{tg} d}$$

$$\operatorname{cotg}^2\left[45^\circ + \frac{\theta}{2}\right] = \frac{\dfrac{\cos l}{\operatorname{sen} l} - \dfrac{\operatorname{sen} d}{\cos d}}{\dfrac{\cos l}{\operatorname{sen} l} + \dfrac{\operatorname{sen} d}{\cos d}} = \frac{\cos l \cos d - \operatorname{sen} l \operatorname{sen} d}{\cos l \cos d + \operatorname{sen} l \operatorname{sen} d}$$

$$\operatorname{cotg}^2\left[45^\circ + \frac{\theta}{2}\right] = \frac{1 - \operatorname{tg} l \operatorname{tg} d}{1 + \operatorname{tg} l \operatorname{tg} d} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}\dfrac{2l}{2}\operatorname{tg}\dfrac{2d}{2}}{1 + \operatorname{tg}\dfrac{2l}{2}\operatorname{tg}\dfrac{2d}{2}} = \operatorname{cotg}\left[45^\circ + \frac{2x}{2}\right] \qquad (4)$$

y poniendo

$$\operatorname{tg}\frac{2x}{2} = \operatorname{tg}\frac{2l}{2}\operatorname{tg}\frac{2d}{2}. \qquad (3)$$

Tomando mercatoriales en (3) y (4) viene :

$$\operatorname{co}\lambda(2x) = \operatorname{co}\lambda(2l) + \operatorname{co}\lambda(2d), \qquad 2\lambda(\theta) = \lambda(2x), \qquad \lambda(\theta) - \frac{1}{2}\lambda[2x]. \qquad (b')$$

Comparando estas expresiones a las obtenidas en 95 para el *orto* u *ocaso* verdaderos, vemos que la primera $(a')$ es idéntica a la $(a)$, y que la segunda $(b')$ tiene su segundo miembro igual al mismo de $(b)$, mientras que el primer miembro de la $(b)$ es $\operatorname{co}\lambda$ (H) y el de la $(b')$ es $\lambda$ (B), luego la $(b')$ debe dar el valor complementario, positivo o negativo, de la $(b)$.

No parece necesario ilustrar con ejemplos el problema que acabamos de resolver.

Y sea la última *aplicación* de la teoría la de la *determinación de la altura y del azimut de un astro al cruzar los semicírculos horarios de seis o de diez y ocho horas.*

**105.** Esta investigación tiene poca importancia práctica, pero en cambio ofrece la oportunidad de poner a prueba una buena parte de la teoría sentada, cuando se la trata por el método mercatorial.

Advertimos, desde luego, que el problema implica la consideración de un triángulo esférico rectángulo en el polo norte o sur del hemisferio del observador, y es, por tanto, de fácil resolución, cuando se emplean las fórmulas corrientes de la trigonometría eférica rectangular.

Suponemos conocidos los dos catetos $\Delta$ y $c$ y tratamos de calcular $z$ y Z.

Para hallar $z$ disponemos de la relación

$$\cos z = \cos \Delta \cos c,$$

$$\text{sen}\, a = \cos \Delta\, \text{sen}\, l \qquad (1)$$

$$\log \text{sen}\, a = \log \cos \Delta + \log \text{sen}\, l.$$

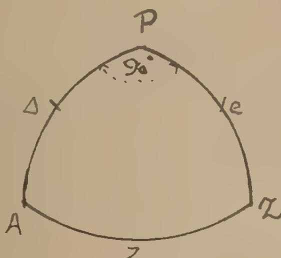


Figura 21

Para hallar el azimut Z tenemos la fórmula

$$\text{tg}\, \Delta = \text{sen}\, c\, \text{tg}\, Z; \qquad \text{tg}\, Z = \frac{\text{tg}\, \Delta}{\text{sen}\, c} = \text{tg}\, \Delta\, \text{cosec}\, c. \qquad (2)$$

expresiones que resuelvan la cuestión sin ambigüedad, fácilmente. Desde luego, el triángulo es siempre posible, por tanto, los datos pueden ser obtusos o agudos, o uno agudo y otro obtuso, con tal que cada uno de ellos sea menor que 180°, y que el perimetro del triángulo no llegue a 360°. Para evitar alguna dificultad que podría presentarse con datos obtusos o uno agudo y otro obtuso, pero que podríamos resolver, supondremos los siguientes valores :

$$\Delta = 69°25'45'', \qquad c = 57°39'30'', \qquad l = 32°20'30''.$$

Por ser $\Delta > c$, será $Z > A$ y $Z + A > 90°$, así como $Z - A < 90°$.

$$\log \operatorname{sen} l = 9{,}72833$$
$$\log \cos \Delta = 9{,}54575$$
$$\log \operatorname{sen} a = 9{,}27408$$
$$05$$
$$5$$

$$a = 10°50'03''$$

$$\log \operatorname{tg} \Delta = 0{,}42562$$
$$\log \sec l = 0{,}07321$$
$$\log \operatorname{tg} Z = 0{,}49883$$
$$64$$
$$19$$

$$Z = 72°24'26''$$

Calculamos A. Sale de la relación

$$\operatorname{tg} c \operatorname{sen} \Delta \operatorname{tg} A \qquad \therefore \qquad \operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{sen} \Delta}$$

$$\log \operatorname{tg} A = \log \operatorname{tg} c + \operatorname{colog} \operatorname{sen} \Delta = \log \operatorname{cotg} l + \log \operatorname{cosec} \Delta$$

$$\log \operatorname{cotg} l = 0{,}19846$$
$$\log \operatorname{cosec} \Delta = 0{,}02861$$
$$\log \operatorname{tg} A = 0{,}22707$$
$$697$$
$$10$$

$$A = 59°20'20''$$

$$Z = \ 72°24'26''$$
$$A = \ 59\ \ 20\ 20$$
$$Z + A = 131°44'46'' > 90°$$
$$Z - A = \ 13\ \ 04\ 06\ < 90$$

**106.** Si se trata de resolver la cuestión por *mercatoriales* y deseamos, como en lo que se acaba de exponer, empezar el cálculo por la *altura*, nos encontramos con que ésta no es calculable *directamente* por tales logaritmos, pero ello no quiere decir que no pueda calcularse por aquellos. En realidad hay que proceder calculando primeramente uno de los ángulos Z o A, y se nos ofrece dos caminos, pero nos parece más conveniente el que sigue.

Las dós analogías de Neper :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}[Z+A] : \operatorname{cotg}\frac{P}{2} = \cos\frac{1}{2}[\Delta - c] : \cos\frac{1}{2}[\Delta + c] \qquad (a)$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}[Z-A] : \operatorname{cotg}\frac{P}{2} = \operatorname{sen}\frac{1}{2}[\Delta - c] : \operatorname{sen}\frac{1}{2}[\Delta + c] \qquad (b)$$

llevando en cuenta que $\operatorname{cotg}\frac{P}{2}$ es igual a 1, puesto que $\frac{P}{2} = 45°$ y su tangente o cotangente vale 1, según enseña la goniometría, permiten estas transformaciones

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}[Z+A] = \frac{\cos\frac{1}{2}[\Delta - c]}{\cos\frac{1}{2}[\Delta + c]} = \frac{\cos\frac{\Delta}{2}\cos\frac{c}{2} + \operatorname{sen}\frac{\Delta}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\cos\frac{\Delta}{2}\cos\frac{c}{2} - \operatorname{sen}\frac{\Delta}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \operatorname{tg}\left[45° + \frac{x}{2}\right] \qquad (2)$$

siendo

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}. \qquad (1)$$

La segunda fórmula se transforma de la misma manera y resulta :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}[Z-A] = \frac{1 - \operatorname{cotg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1 + \operatorname{cotg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \operatorname{cotg}\left[45° + \frac{y}{2}\right] \qquad (4)$$

siendo

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}, \qquad (4)$$

y tomando mercatoriales de (1), (3), (2) y (4), viene :

$$\operatorname{co}\lambda(x) = \operatorname{co}\lambda(\Delta) + \operatorname{co}\lambda(c) = \operatorname{co}\lambda(\Delta) + \lambda(l) \qquad (\alpha)$$

$$\operatorname{co}\lambda(y) = \operatorname{co}\lambda(c) - \operatorname{co}\lambda(\Delta) = \lambda(l) - \operatorname{co}\lambda(\Delta) \qquad (\beta)$$

$$\operatorname{co}\lambda(Z+A) = -\lambda(x) \qquad (\gamma)$$

$$\operatorname{co}\lambda[Z-A] = \lambda(y). \qquad (\delta)$$

Estas expresiones permiten hallar Z y A.

Para obtener $z$ o la altura $a$, podemos servirnos de uno cualquiera de los ángulos Z o A y de $\Delta$ o $c$ respectivamente. El navegante debe preferir esta fórmula :

$$\operatorname{tg} z \cos A \operatorname{tg} \Delta, \qquad \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{tg} \Delta}{\operatorname{tg} A} \tag{c}$$

porque $\Delta$ es más exacta que $c$, ya que este elemento sale generalmente de una *situación* previa, y es calculada para el momento de la observación por la *ortima*. Pero ello no significa renunciar a que intervengan Z y $c$, si el *azimut* es de confianza y la latitud es poco errónea.

Para operar po

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{cotg} a = \frac{\operatorname{tg} \Delta}{\operatorname{tg} A}$$

pondremos

$$\cos A = \operatorname{tg} u,$$

con lo que la ($c$), será

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{tg} \Delta}{\operatorname{tg} u} \tag{d}$$

que debemos escribir de este modo :

$$\operatorname{tg} \frac{2x}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{2\Delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{2u}{2}} \tag{e}$$

y tomando mercatoriales

$$\text{co}\lambda\,(2z) = \text{co}\lambda\,(2\Delta) - \text{co}\lambda\,(2u).$$

Pero de la hipótesis

$$\cos A = \operatorname{tg} u$$

se deduce

$$\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}$$

y de

$$\frac{1 - \operatorname{tg} u}{1 + \operatorname{tg} u} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{2u}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{2u}{2}} = \operatorname{cotg} \left[45^\circ + \frac{2u}{2}\right]$$

viene, pues, la igualdad

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \operatorname{cotg} \left[45^\circ + \frac{2u}{2}\right] \tag{$\varepsilon$}$$

y en mercatoriales

$$2\ \mathrm{co}\lambda\,[A] = \lambda\,(2u). \qquad (6)$$

Como A ya es conocido, duplicaremos su coλ, coλ (A), y esa será la lambda de $2u$, λ (2u), cuya correspondiente buscaremos en las tablas; tendremos así coλ (2u), que restada de coλ [2Δ], de la que se deducirá $z$ y la altura $a$ buscada.

Aplicación de las fórmulas halladas.

*Cálculo de los ángulos Z y A :*

$$\mathrm{co}\lambda\,(\Delta) = 1261{,}65$$
$$\lambda\,(l) = 2052{,}60$$
$$\mathrm{co}\lambda\,(x) = 3314{,}25$$
$$37$$
$$12$$

$$\lambda\,(l) = 2052{,}60$$
$$\mathrm{co}\lambda\,(\Delta) = 1261{,}65$$
$$\mathrm{co}\lambda\,(y) = 790{,}95$$

$$\lambda\,(x) = 2761{,}33$$
$$\lambda\,(y) = 7449{,}17$$

$$\mathrm{co}\lambda\,(Z + A) = -2761{,}33$$
$$\mathrm{co}\lambda\ \mathrm{tab.} = 57$$

$$Z + A\ \mathrm{tab.} \quad 48°15'10''$$
$$180$$
$$Z + A = 131°44'50''$$
$$Z - A = 13\ \ 4\ \ 4$$
$$2Z = 144°48'54''$$
$$Z = 72\ \ 24\ 27$$

$$\mathrm{co}\lambda\,(Z - A = 7449{,}17$$
$$\mathrm{co}\lambda\ \mathrm{tab.} = 47$$
$$30$$

$$Z - A = 13°\ 4'\ 4''$$
$$Z + A = 131\ \ 44\ 50$$
$$2A = 118°40'46''$$
$$A = 59\ \ 20\ 23$$

*Cálculo de la altura a :*

$$2\ \text{co}\lambda\,[A] = \lambda\,(2u) \qquad \text{co}\lambda\,(2z) = \text{co}\lambda\,(Z\Delta) - \text{co}\lambda\,(2u)$$

$$\begin{aligned}
2\ \text{co}\lambda\,(A) &= 21934{,}28 \\
2\ \text{co}\lambda\,(A) &= \phantom{0}3868{,}56 \\
&\phantom{=\ 3868{,}}89 \\
&\phantom{=\ 3868{,}}33 \\
\\
\text{co}\lambda\,(2u) &= 2314{,}90 \\
pp \text{ por } 23 &= \phantom{2314{,}}24 \\
\text{co}\lambda\,(2u) &= 2315{,}14 \\
\\
\text{co}\lambda\,(2\Delta) &= -3369{,}15 \\
\text{co}\lambda\,(2u) &= +2315{,}14 \\
\text{co}\lambda\,(2z) &= \phantom{+}5684{,}29 \\
\text{co}\lambda\,(2z)\ \text{tab.} &= \phantom{+5684{,}}60 \\
\\
2z\ \text{tab.} &= \phantom{1}21^\circ 40'\ 7'' \\
&\phantom{=}\ 180 \\
2z &= 150^\circ 19' 53'' \\
z &= \phantom{1}79\phantom{^\circ}\ \ 9\ 56 \\
&\phantom{=}\ \phantom{1}90 \\
a &= \phantom{1}10^\circ 50' 04''
\end{aligned}$$

ambos resultados (el del cálculo ordinario y el mercatorial) concuerdan satisfactoriamente.

Del mismo modo, si queremos hacer uso del azimut Z, la fórmula

$$\text{tg}\ z \cos Z = \text{tg}\ c,$$

da

$$\text{tg}\ z = \frac{\text{tg}\ c}{\cos Z}$$

que originaría una transformación igual a la anterior, de modo que se tendría :

$$2\ \text{co}\lambda\,(Z) = \lambda\,(2v), \qquad \text{co}\lambda\,(2z) = \text{co}\lambda\,(2c) - \text{co}\lambda\,(2v),$$

$$Z = 72^\circ 24' 27'', \qquad c = 57^\circ 39' 30'', \qquad 2c = 115^\circ 19',$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{co}\lambda\,(Z) = & 1072{,}53 \\
2\,\text{co}\lambda\,(Z) = & 2145{,}06 = \lambda\,(2v) \\
\text{co}\lambda\,(2v)\ \text{tab.} = & \qquad 30 \\
 & \qquad 24 \\
\text{co}\lambda\,(2v)\ \text{tab.} = & 4112{,}99 \\
pp\ \text{por}\ 24 = & \quad 0{,}38 \\
\text{co}\lambda\,(2v) = & 4113{,}35
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
z = & 79^\circ\ 9'57'' \\
 & 90 \\
a = & 10^\circ 50'03''
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{co}\lambda\,(2v) = & \quad 4113{,}35\ - \\
\text{co}\lambda\,(2c) = & -\,1570{,}99 \\
\text{co}\lambda\,(2z) = & -\,5684{,}34 \\
2z\ \text{tab.} = & \qquad 60 \\
 & \qquad 26
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
2z\ \text{tab.} = & 21^\circ 40'\ 6'' \\
 & 180 \\
2z = & 158^\circ 19'54''
\end{array}
$$

Se ve que ya se haya uso del ángulo A o del Z los resultados son iguales; pero esto no invalida la advertencia de preferir el ángulo paraláctico tratándose de un navegante que quiera hacer el cálculo utilizando el método mercatorial.

## CONCLUSIONES GENERALES DE LA DOCTRINA EXPUESTA

**107.** El *cálculo mercatorial* aplicado a los problemas de la *navegación astronómica,* o de la *astronomía esférica,* conduce a resultados de mucha exactitud con sencillez y brevedad, siempre que se trate de triángulos esféricos oblicuángulos o generales.

No economiza tiempo, si los problemas comportan la resolución de triángulos esféricos rectángulos; pero datos y resultados quedan dados por tangentes o cotangentes que proporcionan gran exactitud a las soluciones.

Adolece del defecto de exigir variadas fórmulas para su empleo acertado, pero éstas son fáciles de deducir, y nada obsta a que el cal-

culista se forme de antemano una tabla en que estén inscriptas las fórmulas que haya de usar.

Para tablas hasta ahora conocidas y de que tenemos noticias, las de Guyou y de Barreda, son suficientes para las necesidades de los marinos en el mar; pero no lo serían ya para operaciones terrestres.

Nuestras tablas, ya construídas, siguiendo el método de Guyou, dan los logaritmos llamados *lambdas* y *colambdas* de 15 en 15 segundos de arco y de 1 y 1 segundo de tiempo. Permiten, por tanto, expresar los resultados de los cálculos con gran exactitud.

El trabajo que vamos a emprender construyendo tablas de logaritmos tangentes que den los ángulos de 10 en 10 segundos de arco [1] y de $\frac{2}{3}$ de segundos en tiempo, superarán a las que acabamos de construir antes nombradas y permitirán calcular con una rapidez y exactitud superior a las de las tablas corrientes, pues equivaldrán a tablas ordinarias calculadas de 5 en 5 segundos.

Con ese instrumento y las doctrinas que hemos expuesto, esperamos que los futuros calculista adopten el *método mercatorial* que preconizamos.

[1] Hemos empezado calculando los logaritmos tangentes de 5 en 5 segundos de arco, seguiremos con las partes proporcionales correspondientes, y la tabla equivaldrá a las ordinarias calculadas de 2''5 en 2''5, con lo que podemos asegurar una exactitud a los resultados del décimo de segundo de arco. Las tablas crecientes no llegan a esa precisión, aunque veamos ejemplos en los libros apreciados hasta la centésima de segundo. Esa exactitud la juzgamos ilusoria con tablas de siete decimales.

# VOLÚMENES Y FOLLETOS RECIBIDOS

## En el semestre enero a junio de 1927

### LIBROS

A. Véronnet, *Constitution et Evolution de l'Univers.* Sumario : *Les figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation. Conséquences cosmogoniques. Étude d'une masse hétérogène en rotation. Figure de la Terre et des planètes. Equilibre physique d'une astre gazeaux, Gaz d'une temporature uniforme. Equilibre physique d'un astre gazeaux. Gaz d'une densité uniforme. Maximum de température possible. Equilibre phisyque et extension de l'atmosphère d'un astre gazeaux. Comètes. Etoiles géantes. Entretien de la chaleur solaire. Age du Soleil et de la Terre. Evolution du Soleil et des étoiles. Evolution corrélative de la Terre. Étude de la condensation et de la formation des astres dans une nébuleuse indéfinie. Détermination de la température de formation des astres. Relations entre le temps et la température de formation. Étude de la formation et de l'evolution des systèmes stellaires. Amas stellaires, étoiles nouvelles, étoiles génates, nébuleuses spirales. Formation des systèmes planétaires. Deviation produite par les étoiles voisines. Action de la résistance du milieu. Étude critique des hypothèses cosmogoniques modernes*, 475 páginas, Gaston Doin et Cíe., año 1927, París.

Bertrand de Fontviolant, *Résistance des matériaux, analytique. Graphique.* Sumario : *Notions générales sur les dispositions et les liaisons des systèmes en treillis. Efforts dans les systèmes articulés, sans barres surabondantes. Applications aux poutres en treillis. Efforts dans les systémes articulés, à barres surabondantes. Applications aux poutres en treillis. Efforts dans les systèmes en treillis a assemblages rigides. Déplacements élastiques et calorifiques des noeuds des systémes en treillis, articulés ou à assemblages rigides. Substitution d'une peutre a âme pleine a une poutre en treillis droite ou en arc, pour l'étude des déformations élastiques et calorifique. Application aux poutres droites en treillis, continues ou non. Pièces chargées de bout. Notions générales sur les arcs. Arc de référence. Arc à trois rotules soumis à des forces exterieures fi-*

*xes. Arc à trois rotules soumis à des surcharges mobiles : Lignes d'influence. Arccantilever, en treillis, à trois rotules, soumis à des charges fixes et à des surcharges mobiles. Arc en treillis, encastré à ses deux extrémités et à trois rotules, soumis à des charges fixes et à des surcharges mobiles. Arc a deux rotules soumis à des forces extérieures fixes. Arc à deux rotules soumis à des surcharges mobiles : Lignes d'influence. Poutre à béquilles à une seule travée et Poutre-cantilever a béquilles. Arc encastré à ses extrémités soumis à des forces extérieures fixes. Arc encastré à ses deux extrémités soumis à des surcharges mobiles : Lignes d'influence. Expressions analytiques et constructions gèométriques des dèplacements élastiques et calorifiques, dans l'arc encastré à ses deux extremités et dans les arcs à deux et trois rotules. Portiques continus reposant sur appuis à rotules. Poutres continues à béquilles reposant sur appuis a rotule. Portiques continus reposant sur appuis à encastrement. Poutres continues à béquilles, reposant sur appuis à encastrement,* 728 páginas, J. B. Baillière et fils, año 1927, París.

Charles Callet, *Le Mystere du Langage. Les sons primitifs et leurs évolutions.* Sumario : *Le langage. La Langue Ny. La langue du Sifflement. Les langues gutturales. L'articulation L. La langue du Meuglement. L'onomatopée. Les émissions dentales et labiales B. P. D. T. Conclusión,* 96 páginas, Maisonneuve frères, año 1926, París.

Lorenzo López, *Estadística general de la República del Salvador.* Publicado bajo los auspicios del señor Presidente de la República de El Salvador, doctor don Alfonso Quiñonez Molina, 240 páginas, Imprenta nacional, año 1926, San Salvador.

Biblioteca nacional de El Salvador, *Documentos y datos históricos y estadísticos de la República de El Salvador :* Publicado bajo los auspicios del señor Presidente de la República de El Salvador, doctor don Alfonso Quiñonez Molina, 155 páginas, Imprenta Nacional, año 1926, San Salvador.

L. Garrigue, *Origine des Univers et de la Vie.* Sumario : *L'éther en mouvement. Il se met en bulle, une couche électrique se forme (couche de Heaviside). Mouvements des étoiles, leur cause. Nébuleuses spirales. Mécanisme du soleil créateur de l'atome et de la matière. Origine de l' électricité, sa nature, son essence. Principes de thermodynamique, leur explication. Des électrons et de l'Ion. Régression de la matière. L'électron conditionne le rayon lumineux. Explication des mystérieux rayons de Roetgen, rayons X. La chaleur : ses origines, ses effects. Actions des ondes éthérées frangées sur les minéraux. La self induction, le voltage, le magnetisme. Magnétisme. Mouvements solaires,* etc., 261 páginas, J. B. Baillière et fils, año 1927, París.

E. Louis Backman, *Bidrag till fragan om normala amnessmsattningsprodukters pa hjarta och blodtryck,* 282 páginas, Almqvist & Wiksells Boktryckeri. A. B., año 1912, Uppsala.

Servicio Hidrográfico del Ministerio de Marina de la República Argentina, *Apéndice al Derrotero Argentino.* Parte I (1923) : *Río de la Plata, Ríos Pa-*

*raná, Paraguay y Uruguay. Río Paraná : afluentes; mareas y crecientes : navegabilidad; ríos de acceso; rutas de ultramar y de cabotaje. Paraná inferior. Paraná Medio. Paraná Superior. Alto Paraná. Río Uruguay : afluentes; navegabilidad; mareas, corrientes, vientos. Uruguay Inferior. Uruguay Medio. Alto Uruguay,* 117 páginas, año 1926, Buenos Aires.

A Rateau, D. Eydoux, M. Gariel, *Turbines Hydrauliques. Hydrodynamique Générale : Généralités; Pressions et forces extérieures; Statique des fluides; Cinématique des fluides; Dynamique des fluides; Théorie des tourbillons; Quelques exemples d'écoulement; Principes des images; Sources et doublets; Ecoulement des liquides visqueux; liquides naturels; Courants liquides; Poussées exercée par les fluides en mouvement sur les obstacles (et réciproquement par les corps en mouvement dans une masse fluide fixe); Choc des fluides; Pression d'un jet fluide sur une surface; Variations brusques des sections d'écoulement; Orifices, vannes et ajutages; Homogénéite et similitude en hydrodynamique. Hydrodynamique appliquée aux machines hydrauliques rotatives ou turbomachines hydrauliques : Généralités; Formule fondamentale des turbomachines; similitude des turbo-machines en général; Coefficients caractéristiques; Généralités sur les machines réceptrices ou turbomotrices; Études des turbines par des considérations de similitude; Indications sommaires sur les génératrices; Pompes centrifuges. Hidrodynamique spéciale des conduites d'alimentation des turbines : Régime permanent; Coups de bélier d'onde; Oscillations en masse; Coups de ressort; Cheminéés d'équilibre : Réservoirs d'air,* 692 páginas, J. B. Baillière et fils, año 1926, París.

Antenor Álvarez, *El meteorito del Chaco.* Sumario : *Historia; Geología del Campo del Cielo; Clasificación Mineralógica; Estudios selectos sobre el meteorito del Chaco; Bibliografía del meteorito del Chaco,* 18 ilustraciones varias, 222 páginas, Talleres S. A. Casa Jacobo Peuser, Ltda., año 1926, Buenos Aires.

P. Eduardo Vitoria, S. J., *Química del Carbono. Teórica y práctica.* Sumario : Parte primera : *Cuestiones fundamentales,* Parte segunda : *Funciones simples hidrocarburadas.* Parte tercera : *Funciones simples oxigenadas.* Parte cuarta : *Funciones mixtas de las precedentes.* Parte quinta : *Funciones con nitrógeno.* Parte sexta : *Serie heterocíclica,* 892 página, Tipografía Católica Casals, año 1927, Barcelona.

Ministerio de Marina, Servicio Hidrográfico, *Faros y señales marítimas.* Sumario : Parte I : *Ríos de la Plata, Uruguay, Paraná y Paraguay,* con apéndice de estaciones radiotelegráficas. Parte II : *Costas del Atlántico,* con apéndice de estaciones radiotelegráficas, 319 páginas, Talleres Gráficos Tixi y Schaffner, año 1926, Buenos Aires.

Alberto Betim Paes Leme, *Evoluçao da estructura da terra e geología do Brasil. Vistas a través das collecçoes do Museu Nacional.* Sumario : Primera parte : *Evoluçao da terra;* Segunda parte : *Geologia do Brasil,* 368 páginas, Imprenta Nacional, año 1924, Río de Janeiro.

A Childe, *Guia das collecçoes de Archeologia Classica.* Sumario : *Chronologia Egypcia e parallelo synchronico com os annaes dos povos antigos. Egypto, ou Paiz de Khem. Embalsamacao. Os Ushabtiu. Amuletos e escaravelhos. As estelas funerarias. Estatuetas. Grecia, Italia, etc. Vasos antigos. Do vidro. Figurinas de barro cozido. Estatuetas de bronze. Lampadas. antigas. Utensilios de toucador. Anneis, armas, etc. Objectos diversos. Pinturas de Pompeia. Escripturas antigas. O vestuario antigo*, 98 páginas, Imprenta Nacional, año 1919, Río de Janiero.

Escuela Industrial de la Nación « Otto Krause », *Catálogo de la Biblioteca tecnológica* (comprende las obras ingresadas hasta el 15 de marzo de 1926). Sumario : *Matemáticas, Mecánica técnica, Física, Topografía, Materiales en general, Máquinas, Electrotécnica, Construcciones, Medios de transporte, Minería, Ciencias Naturales, Química, Industrias diversas, Arte, Varias,* 305 páginas, año 1926, Buenos Aires.

## FOLLETOS

Carlos E. Porter, *Los estudios malacológicos en Chile (Apuntes históricos y bibliográficos).* Sumario : *Reseña histórica; Bibliografía Chilena razonada; Autores extranjeros,* 14 páginas, año 1926, Santiago (Chile).

Adolf Söderström, *Zur kenntnis der zellarchitektonik. Uber den bau des cies bei ascaris megalocephala,* 72 páginas, Almwvist & Wiksells Boktrickeri. A. B., año 1926, Uppsala.

Ovidio Rebaudi, *Apuntes sobre minería paraguaya.* Trabajo presentado al « Tercer Congreso Científico Panamericano » efectuado en Lima en diciembre de 1924, 46 páginas, año 1924, Asunción (Paraguay).

Luis Calderón, *La historia de una deuda. Santa Fe versus Rosario,* 63 páginas, año 1927, Talleres Gráficos J. F. Terrir, La Plata.

Santiago Barabino Amadeo, *Antecedentes, diplomas, títulos, nombramientos y trabajos científicos,* 22 páginas, Casa editora A. Guidi Buffarini, año 1926, Buenos Aires.

J. C. Llames Massini, *Tratamiento quirúrgico precoz de la eclampsia. Concepto terapéutico fundado en 92 observaciones personales,* 64 páginas, Imprenta de E. Spinelli, año 1926, Buenos Aires.

Shigeru Komatsu, *Mitsuru Kuhara's on the Beckmann Rearrangement,* 83 páginas, año 1926, Kyoto (Japón).

Daniel M. Vélez, Raúl Arturo Chavira, Emilio F. Montaño, José de Jesús González, Antonio F. Alonso y Tomás G. Perrin, *El Tracoma. Historia y repartición geográfica, sintomatología, diagnóstico diferencial, tratamiento e histología, patología y microbiología,* 51 páginas, Talleres Gráficos de la Nación, año 1926, México.

Tomás G. Perrín, *El problema del Cáncer,* 15 páginas, Talleres Tipográficos hijos de J. Aguilar Vera, año 1926, México.

Roberto Kurtz, *Los privilegios universitarios ante la Constitución Nacional*. Petitorio presentado al Honorable Congreso de la Nación para la derogación de la ley 4560 sobre reglamentación del ejercicio de la profesión de ingeniero, 41 páginas, Imprenta Luis Veggia, año 1926, Buenos Aires.

Gustavo Alemán Bolaños, *Periodismo y Periodistas*. Con prólogo de Juan Ramón Uriarte. Edición dedicada al Presidente de El Salvador, doctor Alfonso Quiñonez Migone, 152 páginas, Imprenta La Salvadoreña, año 1926, El Salvador.

Comité de acción ideológica « Juventud Argentina », *El conflicto Mexicano*, 34 páginas, año 1926, Buenos Aires.

Museo Escolar Central de la Provincia, *Memoria anual correspondiente a 1926 (segundo ejercicio)*, por Antonio Serrano, director del Museo y nómina de contribuyentes, 17 páginas, Talleres Gráficos *La Acción*, año 1927, Paraná.

Fernando Rodrigues da Silveira, *A Vida das Associações em Biologia*, 20 páginas, Tip. *Revista dos Tribunaes*, año 1925, Río de Janeiro. R. Plá y Armengol, *Contribución al estudio de la Herencia en la Tuberculosis*, 45 páginas, Tipografía Emporium, S. A., año 1926, Barcelona.

José Isaac Corral, *Nueva solución del problema de Lord Kelvin sobre ecuaciones de coeficientes reales*, 89 páginas, Imprenta Clásica Española, año 1926, Madrid.

Claro C. Dassen, *Sobre ecuaciones de tercer y cuarto grado*, publicado en la *Revista del Centro Estudiantes de Ingeniería*, año XXVII, nº 293 y siguientes, 32 páginas, Tomás Palumbo, año 1926, Buenos Aires.

Eugenio Gley, *Curso de Fisiología*. Sumario : *Lecciones ; conferencias ; experiencias de laboratorio*, 31 páginas, Secretaría de Educación Pública, año 1925, México.

E. Roquette Pinto, *Anthropologia (Guia das collecçoes)*. Sumario : Primera parte : *A especie humana e os typos da serie animal* ; Segunda parte : *As raças humanas. Os sexos. As idades. Os individuos. Applicaçoes practicas* ; Tercera parte : *Classificaçao das raças humanas e sua distribuiçao geographica. Paleontologia humana*, 74 página, Typographia da Directoria Geral de Estadistica, año 1915, Río de Janeiro.

Carlos E. Porter, *Notas entomológicas*. Sumario : *Diaspino nuevo para la fauna de Chile. Acerca de dos Bracónidos chilenos. Sobre un insecto de las agallas del « Colliguay ». Algunos artrópodos de Río Blanco. Otro Apanteles nuevo de Chile. Breve nota acerca de dos Diaspinae. Sobre una acarocecidia del maitén*, 20 páginas, Imprenta y Litografía, La ilustración, año 1926, Santiago (Chile).

Pio Romero Bosque, *Manifiesto elevado a la Honorable Asamblea Nacional en el acto de asumir la presidencia constitucional de la República de El Salvador. Período 1927-1931*, 16 páginas, Imprenta Nacional, año 1927, San Salvador.

C. Trejo Lerdo de Tejada, *Fiesta de la Raza (12 de octubre de 1926)*. Discurso del excelentísimo señor Ministro de México, pronunciado en la velada del Teatro Avenida de Buenos Aires 16 páginas, Talleres Gráficos Araujo Hnos., año 1926, Buenos Aires.

Carlos F. Melo, *La Jurídica y su primer principio (De la ciencia general del Derecho, su causa primera y contenido último)*, 32 páginas, Imprenta Luis A. Peroni, año 1926, Buenos Aires.

F. Urquieta, *A propósito de algunos informes químicos presentados a la Compañía Recaudadora de Impuestos acerca de los aguardientes elaborados en Arequipa*, con una carta del sabio químico doctor don José Rodríguez Carracido, Rector de la Universidad Central de Madrid, 10 páginas, Tipografía Franklin año 1923, Arequipa (Perú).

Felipe Urquieta, *Informe químico acerca de la cerveza elaborada por la Cervecería Boliviana Nacional de La Paz (Bolivia)*, 17 páginas, Tipografía Medina, año 1925, Arequipa (Perú).

Felipe Urquieta, *Inmunidad, inmunización y sueroterapia como fenómenos exclusivamente químicos*, 56 páginas, Editorial Urquieta, año 1923, Arequipa (Perú).

J. Wilip, *On New Precision-Seismographs*. Sumario : *Some Notes on Seismic Registrations. New Horizontal Pendulums with Hermetic Exclusion of Air. On the Inherent-Period of the New Pendulum. Definition of the Constants of the Seismograph. On the Behaviour of the Pendulum in Air-Draghts. The Registration-apparatus of H. Masing*, 26 páginas, C. Mattiesen, año 1926, Tartu-Dorpat.

Julio R. Castiñeiras, *Contribución al estudio de las ciencias Físicas y Químicas*. Serie técnica IX. *Los nuevos reglamentos alemanes para construcción de hormigón armado, hormigón simple y albañilería armada*. Sumario : A, *Reglamento para construcciones de hormigón armado :* Primera parte : *Prescripciones generales ;* Segunda parte : *Normas para la construcción y el cálculo estático ;* B, *Prescripciones para la ejecución de entrepisos de albañilería armada ;* C, *Prescripciones para la ejecución de obras de hormigón simple ;* D, *Prescripciones para ensayos a la compresión en cubos de hormigón para la ejecución de obras de hormigón simple y armado*, 13 páginas, Imprenta y casa editora Coni, año 1926, Buenos Aires.

*Reglamento Alemán para la ejecución de construcciones de hormigón simple y armado y de albañilería armada.* (Traducción del ingº Julio R. Castiñeiras). Sumario: Primera parte : *Prescripciones generales ;* Segunda parte : *Normas para la construcción y cálculo estático*, etc., 70 páginas, Establecimiento Gráfico de Tomás Palumbo, año 1926, Buenos Aires.

Carlos Correa Luna, *La campaña del Brasil y la batalla de Ituzaingó. Documentos oficiales. Notas biográficas por Enrique Udaondo*, 144 páginas, Talleres Gráficos del Instituto Geográfico Militar, año 1927, Buenos Aires.

# BIBLIOGRAFÍA

---

**Tratado elemental de química**, por el doctor ENRIQUE HERRERO DUCLOUX. Edición revisada y ampliada por el doctor Reinaldo Vanossi.

Esta obra publicada hace 22 años por nuestro distinguido colega el doctor Enrique Herrero Ducloux, no necesitaría ser comentada, pues su autor por demás conocido por su preparación científica y literaria es más que suficiente garantía de su bondad y eficacia, como así lo prueban las seis ediciones anteriores de esta obra. Debemos hacer notar, sin embargo, que ella ha sufrido en manos del doctor Reinaldo Vanossi, que la ha revisado y ampliado, nuevo vigor y nueva vida adaptándola a las modernas concepciones de la materia y sus transformaciones. Continuará siendo seguramente un libro útil para nuestros estudiantes secundarios, los cuales la consultarán con provecho.

JORGE MAGNIN.

## ÍNDICE GENERAL

DE LAS

# MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO CENTÉSIMO TERCERO



## BIBLIOGRAFÍA





SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

## SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †.
Dr. Mario Isola †.
Dr. Germán Burmeister †.
Dr. Benjamín A. Gould †.
Dr. R. A. Philippi †.
Dr. Guillermo Rawson †.
Dr. Carlos Berg †.
Dr. Valentín Balbín †.
Dr. Florentino Ameghino †.
Dr. Carlos Darwin †.
Dr. César Lombroso †.
Ing. Luis A. Huergo †.
Ing. Vicente Castro †.
Dr. Juan J. J. Kyle †.
Dr. Estanislao S. Zeballos †.
Ing. Santiago E. Barabino †.
Dr. Carlos Spegazzini †.
Dr. Walther Nernst.
Dr. Eduardo L. Holmberg.
Ing. J. Mendizábal Tamborel.
Ing. Guillermo Marconi.
Dr. Enrique Ferri.
Dr. Alberto Einstein.

## SOCIOS CORRESPONDIENTES

| | |
|---|---|
| Aguilar, Rafael | México. |
| Arteaga, Rodolfo de | Montevideo. |
| Avendaño, Leonidas | Lima. |
| Alvarado, Antonino | Lima. |
| Ballvé, Horacio | I. de Año N. |
| Bodenbender Guillermo | Córdoba. |
| Bolívar, Ignacio | Madrid. |
| Bonarelli Guido | Ancona (It.). |
| Bertoni, Moisés | P. Bertoni (P.). |
| Bachmann, Carlos J. | Lima. |
| Bravo, José J. | Lima. |
| Cabrera, Blas | Madrid. |
| Carbajal, Melitón M. | Lima. |
| Carvalho, José Carlos | Río Janeiro. |
| Catalán, Miguel A. | Madrid. |
| Corti, José S. | Mendoza. |
| Crinin, Demetrio | Leningrado. |
| Dávila, Rubén | Santiago. |
| Dalevuelta, Jacobo | México. |
| Delage, Yves | París. |
| Escomel, Edmundo | Arequipa (P.). |
| Font, Michel | Lima. |
| Fontana, Luis Jorge | San Juan. |
| González del Riego, Felipe | Lima. |
| Greve, Federico | Santiago. |
| Guevara, Alejandro | Lima. |
| Guignard, León | París. |
| Gez, J. W. | Corrientes. |
| Gjertsen Hjalmar, Fredik | Noruega. |
| Hoernig, Carlos | Santiago. |
| Hijar y Haro, Luis | México. |
| Kinart, Fernando | Amberes. |
| Lillo, Miguel | Tucumán. |
| Luiggi, Luis | Roma. |
| Lugo, Américo | Sto. Domingo. |
| Lobo, Bruno | Río de Janeiro. |
| Manzanilla, José Matías | Lima. |
| Mardones, Francisco | Santiago. |
| Magaña Peón, Pedro | México. |
| Mena, Ramón | México. |
| Molina, Enrique | Concepc. (Ch.) |
| Monjaráz, Jesús | México. |
| Morandi, Luis | Villa Colón (U). |
| Medina, José Toribio | Sgo. de Chile. |
| Montessus de Ballore | Sgo. de Chile. |
| Nordenskjiold, Otto | Gothemburgo. |
| Nilsen Fhowal | Noruega. |
| Pérez Aranibar, Aug. E. | Lima |
| Perrini, Tomás | México. |
| Porter, Carlos E. | Sgo. de Chile. |
| Poirier, Eduardo | Sgo. de Chile. |
| Pi y Suñer, Augusto | Barcelona. |
| Recaséns y Girol, Sebastián | Madrid. |
| Rey Pastor, Julio | Madrid. |
| Reyes Cox, Eduardo | Antofg. (Ch.). |
| Revelli, Pablo | Génova. |
| Risso Patrón, Luis | Sgo. de Chile. |
| Reiche, Carlos | México. |
| Rospigliosi y Vigil, Carlos | Lima. |
| Rowe Leo, S. | Wáshington. |
| Shepherd, William R. | Col. Un. N. York |
| Sklodonska, Curie | París. |
| Tello, Julio C. | Lima. |
| Tobar, Carlos R. | Quito. |
| Torres Quevedo, Leonardo | Madrid. |
| Uhle, Max | Lima. |
| Villalta, Jorge Blanco | Oslo (Norueg. |
| Villarán, Manuel Vicente | Lima. |
| Vélez, Daniel | México. |
| Valle, Heliodoro | México. |
| Volterra, Vito | Roma. |

## SOCIOS ACTIVOS

Adamoli, Pedro A.
Aguirre, Pedro.
Albarracín, Carlos M.
Alcaráz, Ramón A.
Aldunate, Julio C.
Anargyros, Pastor.
Anasagasti, Horacio.
Ameghino, Carlos.
Anchorena, Juan E.
Anastasi, Camilo.
Añón Suárez, Vicente.
Armani, Aquiles.
Arrillaga, Francisco C.
Arroyo, Rufino.
Arroyo, Víctor Manuel.
Aráoz Alfaro, Gregorio.
Arce, Manuel J.
Arditi Thompson, Horacio.
Arnaudo, Silvio J.
Astrada, Ismael.
Ayerza, Rafael.
Aztiria, Ignacio.
Babini, José.
Bado, Atilio A.
Bancalari, Agustín.
Baidaff, Bernardo Ig.
Bachmann, Ernesto.
Barabino Amadeo, Santiago.
Barbieri, Antonio.
Berdoy, Pedro A.
Beretervide, Roberto.
Berrino, Juan B.
Besio Moreno, Nicolás.
Bianchedi, Rómulo.
Bianchi Lischetti, Ángel.
Blaquier, Juan.
Bolognini, Héctor.
Bonino, Alfredo (h.).
Bontempi, Luis.
Bordenave, Pablo E.
Bosisio, Anecto J.
Bonanni, Cayetano.
Bottaro, Juan C.
Botto, Alejandro.
Botto, Armando P.
Bozzini, Luis (h.).
Brèthes, Juan.
Briano, Juan A.
Bruch, Carlos.
Bullrich, Jorge M.
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo.
Butty, Enrique.
Calandra Raúl A.
Calcagno, Alfredo.
Camus, Nicolás.
Candioti, Marcial R.
Candioti, Agustín N.
Canale, Humberto.
Campbell, Diego R.
Cano, Héctor M.
Canónica, Mauricio.
Carabelli, Juan José.
Carbone, Esteban.
Carbonell, José.
Caride Massini, Pedro.
Carette, Eduardo.
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Castro Escalada, Martín.
Cavandoli, Ludovico.
Chanourdie, Enrique.
Chelía, Francisco.
Chiappa, Antonio R.
Chiarizia, Eduardo.
Celasco, Juan L.
Céspedes, Guillermo.
Ciampi, Lanfranco.
Clérice, Eduardo E.
Cock, Guillermo.
Colmo, Alfredo.
Corti, Dalmiro.
Cremona, Andrés V.
Cuomo, Miguel.
Curutchet, Luis.
Curti, Orlando P.
Damianovich, Horacio.
Darquier, Juan A.
D'Ascoli, Lucio.
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor.
Dasso, Ricardo L.
Debenedetti, José.
Debenedetti, Salvador.
Delétang, Luis.
Delfino, Juan Carlos.
Dellepiane, Luis J.
Demarchi, Marco.
Díaz, Emilio C.
Doello-Jurado, Martín.
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Duhau, Luis.
Duncan, Carlos D.
Dupont, Enrique.
Durrieu, Mauricio.
Esteves, Luis P.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández, Miguel.
Ferreyra, Enrique.
Figini, Ángel.
Frenguelli, Joaquín.
Galtero, Alfredo.
Gallardo, Ángel.
Garay Ponce, Filemón.
García, Lucio A.
García, Ricardo S.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato.
Gez, Juan W.
Ghigliazza, Sebastián.
Girado, Francisco J.
Gogénuri, Estanislao E.
Gradin, Carlos.
Grieben, Arturo.
Gurewitsch, Marco.
Gutiérrez, Avelino.
Gutiérrez, Ricardo J.
Hermida Álvarez, Ángel.
Hermitte, Enrique.
Herrera Vegas, Marcelino.
Hicken, Cristóbal M.
Hickethier, Carlos F.
Holmberg, Adolfo D.
Howard, Jorge W.
Hoxmark, William.
Hoyo, Arturo.
Huergo, Eduardo.
Huergo, José M.